詳細解答

STEP I 2010，第 5 題

純數學 • 二項式係數恆等式

> **STEP I 2010，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q5

關鍵思路

這些和式每一個都是 $(1+x)^n$ 的二項展開式（binomial expansion）的化身：先對展開式做一些處理，再代入 $x=1$。$\binom{n}{k}$ 前面的因子 k，正是對 x^k 求導（differentiate）所產生的；因子 $\frac{1}{k+1}$，則是對 x^k 積分（integrate）所產生的。因此我們對恆等式（identity）

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

求導或積分，然後代入 $x=1$。至於 k^2，我們需要求導兩次，並在兩次之間乘以 x。

解答

以下 n 一直是正整數，而

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

對所有實數 x 均成立。由於等式兩邊都是多項式（polynomial），我們可以逐項求導或逐項積分，而恆等式依然成立。

第 (i) 部分

在 $(*)$ 中代入 $x=1$。左邊是 2^n，而每個 x^k 都變成 1，所以

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

把 $(*)$ 對 x 求導。常數項消失，而 $\binom{n}{k}x^k$ 變成 $k\binom{n}{k}x^{k-1}$：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

代入 $x = 1$ 得

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

這正是所要證明的結果。

第 (iii) 部分

這次我們想要的是 $\binom{n}{k}$ 除以 $k+1$，而這正好可以由 $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$ 得到。把 $(*)$ 由 0 積分至 1，左邊是

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

而右邊是

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

因此

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

這正是所要證明的結果。留意積分下限十分重要：正因為由 0 開始積分，才會出現那個 -1。

第 (iv) 部分

> **想一想** 如果我們只是把 $(**)$ 再求導一次，得到的係數會是 $k(k-1)$，而不是 k^2。怎樣才能得到 k^2 呢？

在第二次求導之前，先把 $(**)$ 乘以 x。這樣 $k\binom{n}{k}$ 旁邊的冪便還原為 x^k，於是下一次求導帶下來的因子恰好又是 k：

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

求導，左邊使用積法則（product rule），得

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

（當 $n=1$ 時，左邊第二項含有因子 $n-1=0$，所以這一項根本不存在；恆等式仍然成立。）現在代入 $x=1$：

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &= n\,2^{n-2}(2+(n-1))\\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

另一個做法是寫成 $k^2=k(k-1)+k$。把 $(*)$ 求導兩次再代入 $x=1$，得 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$，再加上第 (ii) 部分的結果，便得到相同的答案。

驗算

取 $n=3$，此時各係數為 $1,3,3,1$。

- (i) $1+3+3+1=8=2^3$。
- (ii) $3+6+3=12=3\cdot 2^2$。
- (iii) $1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2^4-1)$。
- (iv) $3+12+9=24=3\cdot 4\cdot 2$。

我們亦已用分數作精確計算，對由 1 至 40 的每一個 n 驗證了全部四個恆等式。

常見錯誤

- 在 (iii) 中，忘記了積分下限的貢獻，得出 $\frac{2^{n+1}}{n+1}$。
- 在 (iv) 中，直接對 $(**)$ 求導，得到的是 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$，而不是 $\sum k^2\binom{n}{k}$。

STEP 之外

這些恆等式都有概率上的意義。設 X 為擲一枚公平硬幣 n 次所得正面的次數，則 $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}/2^n$，所以第 (ii) 部分說明 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$，第 (iv) 部分說明 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{n(n+1)}{4}$，由此得 $\mathrm{Var}(X)=\frac{n}{4}$。對母函數（generating function）求導以求出矩（moments），是大學一年級的標準技巧。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）對此有完整的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。