詳細解答

STEP I 2010，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 2010，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q4

關鍵思路

這個代換（substitution）的用意，是令 x 和 $x+1$ 同時變成分母同為 t^2-1 的簡單分數，於是兩者乘積的平方根可以準確地開出來。積分隨即化為附註中的標準積分。至於體積，把 y 平方後會得到兩個容易處理的對數項和一個交叉項（cross term），而這個交叉項正正就是我們剛求得的積分。

解答

積分

取 $x>0$。代換 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$（其中 $t>1$）是合理的：解出 t 得

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

而當 t 取遍 $(1,\infty)$ 時，x 取遍 $(0,\infty)$（遞減地），每個 t 對應唯一一個 x 值。

現在

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1}, \qquad \text{所以} \qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

由於 $t>1$，t 和 t^2-1 都是正數，所以

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

? **想一想** 為甚麼開平方根時需要 $t>1$？

平方根永不為負，所以 $\sqrt{t^2/(t^2-1)^2} = |t|/|t^2-1|$。條件 $t > 1$ 讓我們可以把兩個絕對值（modulus）符號都去掉。這也解釋了為何這樣選取：$t^2 - 1 > 0$ 正是令 $x > 0$ 的條件。

求導，得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + c,\end{aligned}$$

這裏用了附註中 $a = 1$ 的情況，以及 $t > 1$ 令 $(t-1)/(t+1)$ 為正數這一事實。

現在利用 $t = \sqrt{x+1}/\sqrt{x}$ 換回 x。把分子和分母同乘以 $\sqrt{x}$，

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

其中我們把分子和分母同乘以 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$，並用了平方差（difference of two squares）公式。故此

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + c,$$

正如所求。

體積

當 $x > 0$ 時，曲線上 $y > 0$，因為由 $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ 可得 $1/\sqrt{x} > 1/\sqrt{x+1}$。所以曲線與 x 軸之間的區域旋轉所掃出的體積是 $V = \pi\int y^2\,\mathrm{d}x$。展開後，

$$y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

而最後一項是第一部分中被積函數（integrand）的兩倍。所以

$$V = \pi\Big[\ln x + \ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16} - 2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

積分上下限是特意選取的，好讓各個平方根都很整齊：

- 當 $x = \frac{9}{16}$：$\sqrt{x} = \frac{3}{4}$，$\sqrt{x+1} = \frac{5}{4}$，兩者之和為 2，而 $x(x+1) = \frac{225}{256}$；
- 當 $x = \frac{1}{8}$：$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\sqrt{x+1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$，兩者之和為 $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$，而 $x(x+1) = \frac{9}{64}$。

第一個方括號的值是

$$\ln\frac{225}{256} - \ln\frac{9}{64} = \ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right) = \ln\frac{25}{4},$$

而第二個是

$$2\ln 2 - 2\ln\sqrt{2} = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

因此

$$V = \pi \ln \frac{25}{4} - 2\pi \ln 2 = \pi \ln \frac{25}{4} - \pi \ln 4 = \pi \ln \frac{25}{16} = 2\pi \ln \frac{5}{4},$$

這正是我們要的結果。

驗算

- 對答案求導：

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  因為括號內等於 $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$。

- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\pi\int_{1/8}^{9/16} y^2\,\mathrm{d}x \approx 1.402052$，與 $2\pi\ln\frac{5}{4} \approx 1.402052$ 吻合。辛普森法則亦印證了 $\int_{1/8}^{9/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \ln 2 \approx 0.693147$。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 中的負號。正是這個負號把 $\ln\frac{t-1}{t+1}$ 變成 $\ln\frac{t+1}{t-1}$。
- 把 y^2 展開成 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$：交叉項 $-2/\sqrt{x(x+1)}$ 正是第一部分的用意所在。
- 在體積公式中漏掉因子 π，或者把 π 寫成 2π。

STEP 之外

答案 $2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ 其實就是 $2\,\mathrm{arsinh}\,\sqrt{x}$，因為 $\mathrm{arsinh}\,u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$。用代換 $x = \sinh^2\theta$，一行就可得到同樣的結果。選取能把平方根有理化（rationalise）的代換，是一套有系統的技巧（歐拉代換，Euler substitutions），而它背後支撐着這樣一個結果：凡是 x 與 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理函數（rational function），其積分都可以用初等函數（elementary functions）表示。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中還有很多同類的積分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。