詳細解答

STEP I 2010，第 3 題

純數學 • 和化積公式

> **STEP I 2010，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q3

關鍵思路

和差化積公式（sum-to-product formulae）的作用，正是把兩個正弦（或餘弦）之差化為乘積。橢圓（ellipse）上連接參數（parameter）為 u 和 v 的兩點的弦（chord），其斜率（gradient）為 $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$。分子和分母都是差，所以可用這些公式把它們因式分解，約去公因式之後，斜率只取決於和 $u + v$。於是比較兩條弦，就歸結為比較兩個餘切（cotangent）。

解答

三角恆等式

利用複角公式（compound-angle formulae），

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

正如所求。現在，對任意 A 和 B，設 $x = \frac{1}{2}(A+B)$ 及 $y = \frac{1}{2}(A-B)$，則 $x + y = A$ 及 $x - y = B$。這個恆等式（identity）變成

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

同樣地，

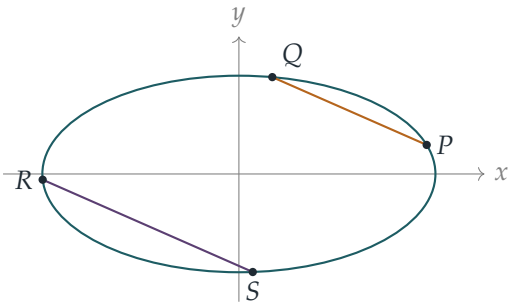
$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

再作相同的代換，便得

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

平行弦

四點全都位於橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，按逆時針方向依次為 P、Q、R、S。下圖顯示 $a=2$、$b=1$ 時的一對平行弦。



弦的斜率。在 $[0,2\pi)$ 內取兩個參數 $u<v$，使得通過 $(a\cos u, b\sin u)$ 和 $(a\cos v, b\sin v)$ 的弦不是垂直的，即 $\cos v \neq \cos u$。在兩個恆等式中取 $A=v$、$B=u$，可知其斜率為

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)} = \frac{2b\cos\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)} = -\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

這樣約分是合理的：$0<v-u<2\pi$，所以 $\frac{1}{2}(v-u)$ 嚴格介乎 0 與 π 之間，故 $\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$。由於原來的分母不等於零，$\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$ 亦成立，所以餘切有定義。

記 $\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$ 及 $\beta=\frac{1}{2}(r+s)$。PQ 和 SR 都不是垂直的，所以

$$\text{斜率：}PQ=-\frac{b}{a}\cot\alpha, \qquad \text{斜率：}SR=-\frac{b}{a}\cot\beta,$$

其中 $\sin\alpha\neq 0$ 及 $\sin\beta\neq 0$。兩條非垂直的直線平行，當且僅當它們的斜率相等；又因為 $b/a\neq 0$，

$$PQ \parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

? **想一想** 為甚麼不能直接「約去 cot」而得出 $\alpha=\beta$？

因為 cot 並非一對一（one-to-one）：它以 π 為週期（period）重複取值。為了顧及這一點，把兩者之差寫成單一個正弦：

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

分母不等於零，所以

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha)=0 \iff \beta-\alpha=k\pi \text{ ，對於某整數} k.$$

確定 k 的值。我們有

$$\beta-\alpha=\tfrac{1}{2}[(r-p)+(s-q)].$$

由於 $p<r$ 及 $q<s$，兩個括號內的值都是正數，所以 $\beta-\alpha>0$。由於四個參數都在 $[0,2\pi)$ 內，每個括號內的值都小於 2π，所以 $\beta-\alpha<2\pi$。嚴格介乎 0 與 2π 之間的 π 的倍數只有 π 本身，所以 $k=1$。因此

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q)=\pi \iff r+s-p-q=2\pi.$$

每一步都是等價關係，所以兩個方向都已證明，正如所求。

（這兩條直線不可能重合：一條直線與橢圓最多相交於兩點，而 P、Q、R、S 是四個相異的點。所以這裏的「平行」是指真正平行而且互不重合。）

驗算

- 取 $p=0$、$q=\frac{\pi}{2}$、$r=\pi$、$s=\frac{3\pi}{2}$，則 $r+s-p-q=2\pi$。此時 $P=(a,0)$、$Q=(0,b)$、$R=(-a,0)$、$S=(0,-b)$，而 PQ 和 SR 的斜率都是 $-b/a$。當 $a=2$、$b=1$ 時，兩個斜率都等於 -0.5。
- 對稱性：條件即是 $\frac{1}{2}(r+s)=\frac{1}{2}(p+q)+\pi$。變換 $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ 會令點的參數增加 π，而把弦 PQ 旋轉半周會得出一條平行的弦，與結果吻合。
- 數值檢驗：隨機選取 a,b 以及 $p<q<r<s$，在 $r+s-p-q=2\pi$ 的情況下（約 5000 個特意構造的例子），兩個斜率完全相等，其他情況下則從不相等。

常見錯誤

- 由 $\cot\alpha=\cot\beta$ 直接推出 $\alpha=\beta$。這樣會得到 $r+s=p+q$，在這裏是不可能的。cot 的週期正是整題的關鍵。
- 忘記說明為何可以約去 $\sin\frac{1}{2}(v-u)$，或者沒有利用 $p<q<r<s$ 這個次序來排除 $k=0$ 和 $k=2$。

STEP 之外

把橢圓寫成 $(a\cos t, b\sin t)$，可見它是單位圓（unit circle）在伸縮變換（stretch）$(x,y)\mapsto(ax,by)$ 之下的像。這類線性映射（linear map）把平行線變為平行線，所以這道題其實

是關於圓的問題。在圓上，由角 p 到角 q 的弦垂直於角 $\frac{1}{2}(p+q)$ 處的半徑，於是結果幾乎一目了然。這種利用映射下保持不變的性質來簡化問題的想法，貫穿線性代數和幾何。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是認識線性映射如何運作的好去處。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多 STEP 風格的三角恆等式練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。