詳細解答

STEP I 2010，第 2 題

純數學 • 曲線描繪

STEP I 2010，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q2

關鍵思路

用商法則（quotient rule）求導，並抽出永不為零的因子 e^x。這樣駐點（stationary point）就是一個二次式的根，所以「有兩個駐點」其實是關於其判別式（discriminant）的一個條件。至於繪畫略圖，同一個二次式的正負號告訴我們曲線在哪裏上升、在哪裏下降，而曲線在漸近線（asymptote）附近以及當 $x \to \pm\infty$ 時的表現，則補足其餘的細節。

解答

設 $y = \dfrac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x$，其定義域為 $x \neq b$。利用積法則（product rule），並由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x[(x-a)(x-b)+(a-b)]}{(x-b)^2}.$$

由於 $\mathrm{e}^x > 0$，而且當 $x \neq b$ 時 $(x-b)^2 > 0$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的正負號與下式的正負號相同：

$$q(x) = (x-a)(x-b) + (a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

而駐點正好就是 q 的根當中不等於 $x = b$ 的那些。

? **想一想** q 的根會否剛好落在 $x = b$，即曲線沒有定義的地方？

這並不會造成問題：$q(b) = a - b$，所以只有當 $a = b$ 時 $x = b$ 才是根。但這時曲線只不過是 $y = \mathrm{e}^x$（在 $x = b$ 處有一個空洞），根本沒有駐點。因此在任何情況下，駐點都恰好

是 q 的實根，而駐點有兩個，當且僅當 q 有兩個相異實根，即其判別式為正：

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

兩個因子之積為正，當且僅當兩者皆正或兩者皆負。兩者皆負即 $a-b<0$；兩者皆正即 $a-b>4$（這已保證 $a-b>0$）。因此，若有兩個駐點，必須有

$$a-b<0 \quad \text{或} \quad a-b>4,$$

這正是所要證明的。（反過來說，兩個條件中任何一個成立，都會有兩個駐點。）

第 (i) 部分

取 $a=0$、$b=\frac{1}{2}$，則 $a-b=-\frac{1}{2}<0$，並且

$$y=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=(x-1)(x+\tfrac{1}{2}).$$

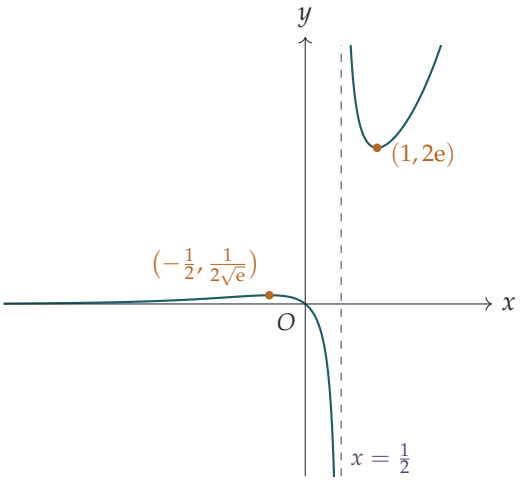
駐點位於 $x=-\frac{1}{2}$ 和 $x=1$，分別在鉛垂漸近線 $x=\frac{1}{2}$ 的兩側，符合題目要求。它們的 y-值為

$$y(-\tfrac{1}{2})=\frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.30, \qquad y(1)=\frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{e}\approx 5.44.$$

由於當 $x<-\frac{1}{2}$ 時 $q>0$，當 $-\frac{1}{2}<x<1$（其中 $x\neq\frac{1}{2}$）時 $q<0$，而當 $x>1$ 時 $q>0$，所以點 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}})$ 是局部極大點（local maximum），而 $(1,2\mathrm{e})$ 是局部極小點（local minimum）。

其他特徵：

- 當 $x\to-\infty$ 時，$\frac{x}{x-1/2}\to 1$ 而 $\mathrm{e}^x\to 0$，所以 $y\to 0$。當 $x<0$ 時，x 和 $x-\frac{1}{2}$ 皆為負數，所以 $y>0$：曲線從上方趨近負 x-軸。
- 曲線只在原點與坐標軸相交，而且當 $0<x<\frac{1}{2}$ 時 $y<0$。
- 當 $x\to\frac{1}{2}^-$ 時，$y\to-\infty$；當 $x\to\frac{1}{2}^+$ 時，$y\to+\infty$（分子趨向 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$）。
- 當 $x\to\infty$ 時，$y\to\infty$，增長的速度與 e^x 相若。



第 (ii) 部分

取 $a = \frac{9}{2}$、$b = 0$，則 $a - b = \frac{9}{2} > 4$，所以同樣有兩個駐點。這時

$$y = \frac{x - \frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x) = x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{9}{2} = \tfrac{1}{2}(2x-3)(x-3),$$

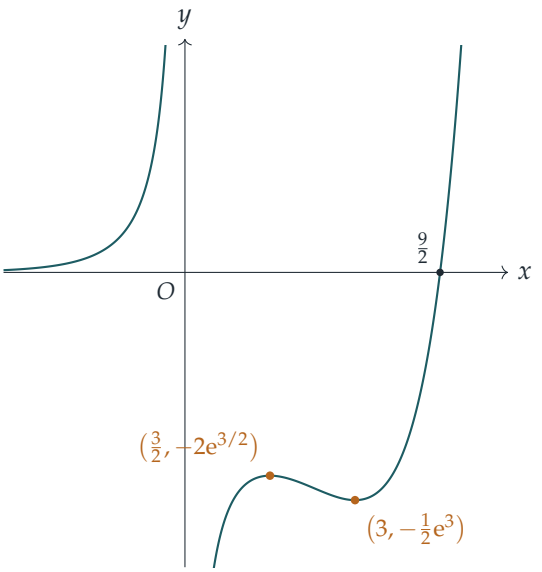
所以駐點位於 $x = \frac{3}{2}$ 和 $x = 3$，兩者都在漸近線 $x = 0$ 的右方。它們的 y-值為

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2} = -2\mathrm{e}^{3/2} \approx -8.96, \qquad y(3) = \frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 \approx -10.04.$$

q 的正負號如下：當 $x < \frac{3}{2}$（$x \neq 0$）時為正，在 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 上為負，當 $x > 3$ 時為正，所以 $\left(\frac{3}{2}, -2\mathrm{e}^{3/2}\right)$ 是局部極大點，而 $\left(3, -\frac{1}{2}\mathrm{e}^3\right)$ 是局部極小點。留意兩點都位於 x-軸下方，而且極小點只比極大點略低，所以兩點之間的凹陷很淺。

其他特徵：

- 當 $x \to -\infty$ 時，$y \to 0$；當 $x < 0$ 時，$x - \frac{9}{2}$ 和 x 皆為負數，所以 $y > 0$。在 $x < 0$ 上曲線遞增（因為該處 $q > 0$），由剛好高於橫軸之處一直向上升往漸近線。
- 當 $x \to 0^-$ 時，$y \to +\infty$；當 $x \to 0^+$ 時，$y \to -\infty$（分子趨向 $-\frac{9}{2}$）。
- 唯一的截點（intercept）是 $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$；在 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 上 $y < 0$，而當 $x > \frac{9}{2}$ 時 $y > 0$，並且當 $x \to \infty$ 時 $y \to \infty$。



這裏 y-軸本身就是鉛垂漸近線。

驗算

- 在隨機選取的 (a,b,x) 上以數值方法計算 y 的導數，結果與 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的公式吻合；對隨機選取的 (a,b) 數算 q 變號的次數，亦發現恰好在 $a-b<0$ 或 $a-b>4$ 時才有兩個駐點。
- 在 (i) 中，$y(1)=5.4366=2\mathrm{e}$ 及 $y(-\frac{1}{2})=0.3033$；在 (ii) 中，$y(\frac{3}{2})=-8.9634$ 及 $y(3)=-10.0428$，而各點左右兩旁鄰近的函數值亦確認了它們是極大點還是極小點。
- 檢查條件是否合理：在 (i) 中 $a-b=-\frac{1}{2}$，在 (ii) 中 $a-b=\frac{9}{2}$，兩者都在容許的範圍之內，理應如此。

常見錯誤

- 把判別式展開後，沒有察覺它就是 $(a-b)^2-4(a-b)$；只要以 $a-b$ 來表示，它便可以簡潔地因式分解。
- 忘記檢查 q 的根不可能落在漸近線 $x=b$ 上。
- 在 (ii) 中，把極大點和極小點畫在 x-軸的上下兩側：其實兩者都在軸的下方，而曲線只在 $x=\frac{9}{2}$ 處穿過該軸。

STEP 之外

這裏所用的方法，即根據導數的正負號和各個極限來判斷曲線的形狀，在大學第一門分析(analysis)課程中會得到嚴格的論證：一方面藉着中值定理(Mean Value Theorem)(在某區間上導數為正，確實意味着函數遞增)，另一方面藉着無窮遠處極限的嚴謹定義。當 $x \to \pm\infty$ 時，e^x 勝過任何有理函數（rational function），這也是在該課程中證明的一個標準結果。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把這一切都講解得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。