詳細解答

STEP I 2010，第 13 題

概率與統計 • 泊松過程的等候時間

STEP I 2010，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q13

關鍵思路

「第一則短訊在第 1 至第 2 小時之間收到」等同於「第一個小時內沒有短訊，但並非頭兩個小時內都沒有短訊」。兩者各自都是泊松分佈（Poisson distribution）中零個事件的概率，也就是單獨一個指數式。之後代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$，一切便化為一條二次方程，餘下的工作交給韋達定理（Vieta's formulas，即根之和與根之積）便可完成，Mildred 的部分也是如此。

解答

我們採用慣常的泊松模型：George 在任何長度為 t 小時的時段內收到的短訊數目服從平均值為 λt 的泊松分佈，而互不重疊的時段內的數目互相獨立（independent）。時間由早上開始時起計。由於時間是連續的，第一則短訊剛好在第 1 小時或剛好在第 2 小時收到的概率為零，所以端點包括與否並無影響。

George 的方程

設 T 為 George 收到第一則短訊前所經過的時間（以小時計）。那麼 $T > t$ 當且僅當 $[0, t]$ 內沒有短訊，所以

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\text{Poisson}(\lambda t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

事件 $\{1 < T \leq 2\}$ 就是從 $\{T > 1\}$ 中剔除 $\{T > 2\}$，而 $\{T > 2\} \subseteq \{T > 1\}$，所以

$$p = \mathrm{P}(1 < T \leq 2) = \mathrm{P}(T > 1) - \mathrm{P}(T > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

全式乘以 $\mathrm{e}^{2\lambda}$，得 $p\mathrm{e}^{2\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda} - 1$，即

$$p\mathrm{e}^{2\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda} + 1 = 0,$$

正是所求。

λ 的兩個正值

設 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$。由於 $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda}$ 是由 $(0,\infty)$ 到 $(1,\infty)$ 的嚴格遞增雙射（bijection），λ 的正數解恰好對應於下式中滿足 $x > 1$ 的解：

$$px^2 - x + 1 = 0.$$

這裏 $p > 0$（它是某事件的概率，而該事件在例如 $[1,2]$ 內剛好收到一則短訊、之前一則也沒有的情況下必定發生），所以這確實是一條二次方程。

> **想一想** 要證明兩根為實數並不困難。但我們怎樣知道兩根都大於 1？

*相異實根。*判別式（discriminant）為 $1 - 4p > 0$，因為 $4p < 1$，所以方程有兩個相異實根 $x_1 < x_2$。

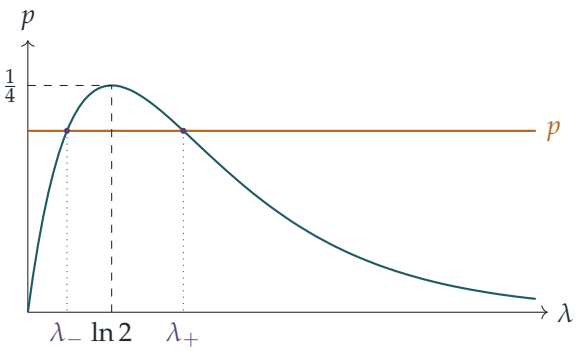
*兩根均大於 1。*根據韋達定理，$x_1 + x_2 = \frac{1}{p}$ 及 $x_1 x_2 = \frac{1}{p}$。於是

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p} + 1 = 1 > 0,$$

所以 $x_1 - 1$ 與 $x_2 - 1$ 同號。兩者之和為 $x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{p} - 2 > 0$，因為由 $p < \frac{1}{4}$ 可得 $\frac{1}{p} > 4$。因此兩者皆為正數：$x_1 > 1$ 及 $x_2 > 1$。

故此 $\lambda_{\pm} = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2p}\right)$ 是滿足該方程的兩個相異的 λ 正值。

看看圖像便明白箇中道理。把 $p = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}$ 視為 λ 的函數，它在 $\lambda = 0$ 時為 0，當 $\lambda \to \infty$ 時趨向 0，並且（設 $u = \mathrm{e}^{-\lambda}$，則 $p = u - u^2$）在 $u = \frac{1}{2}$，即 $\lambda = \ln 2$ 時取得極大值 $\frac{1}{4}$。高度為 $p < \frac{1}{4}$ 的水平線與曲線相交兩次：一部冷清的電話（根本很少收到短訊）和一部繁忙的電話（短訊通常在第一個小時內便收到）可以給出相同的 p。



Mildred：$\lambda_1 + \lambda_2$

每部電話單獨來看，都與 George 的情況完全相同，所以 e^{λ_1} 和 e^{λ_2} 都滿足 $px^2 - x + 1 = 0$。這條二次方程只有兩個根，而 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 e^{λ_1} 和 e^{λ_2} 就是它的兩個根 x_1 和 x_2。（這需要 $p < \frac{1}{4}$，而此條件成立，因為存在兩個相異的值：當 $p = \frac{1}{4}$ 時方程有重根。）由根之積，

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = x_1x_2 = \frac{1}{p}, \qquad \text{所以} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \ln\frac{1}{p} = -\ln p.$$

Mildred 的第一則短訊

想一想 Mildred 兩部電話合共收到的短訊總數服從甚麼分佈？

兩個數目是獨立的泊松變量，所以它們之和服從泊松分佈，其平均值為兩個平均值之和：在 t 小時內，她合共收到 $\text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ 則短訊。換一個說法，設 T_1, T_2 為兩部電話各自的等候時間；它們互相獨立，而她的第一則短訊在 $T = \min(T_1, T_2)$ 時收到，且

$$P(T > t) = P(T_1 > t)\,P(T_2 > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

無論用哪一種方法，設 $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$，則 $e^{-\mu} = p$，再沿用處理 George 時的同一論證，可得

$$P(1 < T \leq 2) = e^{-\mu} - e^{-2\mu} = p - p^2 = p(1 - p).$$

驗算

- 取 $\lambda = 0.8$，$p = e^{-0.8} - e^{-1.6} \approx 0.2474$；模擬 2×10^5 個指數分佈（exponential distribution）的等候時間，所得結果為 0.2462。
- 取 $p = 0.2$：兩根為 $\lambda_1 \approx 0.3235$ 和 $\lambda_2 \approx 1.2859$，兩者皆為正數，其和為 $1.6094 = \ln 5 = -\ln 0.2$。模擬 $\min(T_1, T_2)$ 所得的最後一個概率為 0.1601，而 $p - p^2 = 0.16$。
- 合理性檢查：$p(1 - p) < p$，理應如此，因為有兩部電話時，第一則短訊往往較早收到，令「一小時內沒有短訊」的可能性降低。

常見錯誤

- 證明了 x 的兩根是正實數，卻忘記 $\lambda > 0$ 需要 $x > 1$，而不僅是 $x > 0$。
- 在最後一部分把兩部電話的概率相加，或把它們相乘（p^2）。正確的事件是「任何一部電話收到的第一則短訊」，由合併後的速率決定。

STEP 之外

泊松過程（Poisson process）中第一個事件出現前的等候時間服從指數分佈，而本題用到的合併性質（速率分別為 λ_1、λ_2 的獨立泊松過程合併成一個速率為 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松過程）是泊松過程的基本性質之一，與之並列的還有「稀疏化」（thinning，即每個事件各自獨立地以概率 q 保留）。這些想法是排隊論（queueing theory）以及應用概率中許多內容的基礎。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）對泊松過程的處理方式，正好自然地承接本題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。