詳細解答

STEP I 2010，第 11 題

力學 • 圓上的碰撞

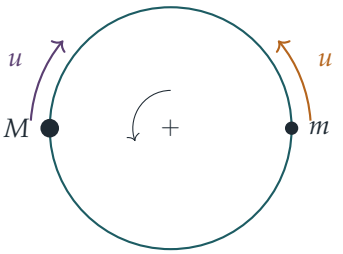
> **STEP I 2010，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q11

關鍵思路

雖然兩個質點（particle）在圓上運動，但每次碰撞（collision）其實都是沿公切線方向的普通一維碰撞：光滑凹槽只會在垂直於運動的方向施力，所以它既不能改變速率，也不會影響切向的衝量（impulse）。因此我們採用動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law），並以沿圓周量度的帶符號速度來列式。此後，兩個事實已包含全部資訊：帶符號的總動量永遠不變，而每次碰撞都令相對速率乘以 e。

解答

我們把兩個質點看成光滑水平凹槽內的點。取逆時針方向為正，設 m 最初以 u 逆時針運動，M 以 u 順時針運動，所以它們的帶符號速度分別是 u 和 $-u$。



在兩次碰撞之間，每個質點所受的唯一水平力就是光滑凹槽的法向反作用力（normal reaction），它垂直於速度。這個力不作功，所以每個質點的速率保持不變。碰撞時，兩個質點互相施加的衝量沿公切線方向，大小相等、方向相反，而凹槽並不提供任何切向衝量。因此每次碰撞中，沿圓周的帶符號總動量不變，而牛頓定律亦適用於帶符號速度。

第一次碰撞

設第一次碰撞後的帶符號速度為 p（對於 m）和 q（對於 M）。由動量守恆和牛頓定律得

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

把 $q = p + 2eu$ 代入第一條方程，得 $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$，所以

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

因此第一次碰撞後，兩個質點的速率分別為

$$\text{質點}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{質點}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

想一想 哪些正負號表示質點改變了方向？

質點 m 原本沿正方向運動，所以它恰好在 $p < 0$ 時反向。由於 $M > m$ 且 $e \geq 0$，括號內的 $M - m + 2eM$ 是正數，所以 m 必定反向。質點 M 原本沿負方向運動，所以它恰好在 $q > 0$ 時反向，即當

$$2em > M - m.$$

所以在這個條件下，兩個質點都改變方向，正如題目所要求。

再經過 $2n$ 次碰撞之後

為何 $mv - MV = u(M-m)$。開始時，帶符號的總動量是 $mu - Mu = -u(M-m)$。碰撞令它守恆，而在兩次碰撞之間速率不變，所以它永遠保持這個值。

由於兩個質點在每次碰撞時都反向，第一次碰撞後 m 順時針運動而 M 逆時針運動；其後每次碰撞都把這個情況對調。再經過 $2n$ 次碰撞之後，總共發生了 $2n+1$ 次碰撞，是奇數次，所以 m 又是順時針運動，M 又是逆時針運動。它們的帶符號速度是 $-v$ 和 V，而

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

相對速率。每次碰撞後，兩個質點以恆定速率沿圓周向相反方向分開，然後在圓的另一邊再次相遇，而互相接近時的相對速率與分開時相同。牛頓定律指出，碰撞後的分離速率等於碰撞前接近速率的 e 倍。最初的接近速率是 $2u$，所以經過 $2n+1$ 次碰撞後，分離速率是 $2ue^{2n+1}$。由於兩個質點向相反方向運動，這個分離速率就是 $v + V$：

$$v + V = 2ue^{2n+1}.$$

求解。把第二條方程乘以 M，再與第一條相加：

$$(m+M)v = u(M-m) + 2Mue^{2n+1},$$

又把第二條方程乘以 m，再減去第一條：

$$(m+M)V = 2mue^{2n+1} - u(M-m).$$

因此

$$v = \frac{u\big(M-m+2Me^{2n+1}\big)}{M+m}, \qquad V = \frac{u\big(2me^{2n+1}-(M-m)\big)}{M+m}.$$

驗算

- 代入 $n=0$，便得回上面求得的第一次碰撞後的速率。
- 取 $m=2$、$M=3$、$e=0.8$、$u=1$，公式在 $n=0$ 時給出 $(v,V)=(1.16,\,0.44)$，在 $n=1$ 時給出 $(0.8144,\,0.2096)$。逐步模擬兩個質點繞圓運動並碰撞的過程，在第 1 次和第 3 次碰撞後得到的正是這些數值。
- 動能（kinetic energy）不應增加。當 $e=1$ 時，$v = u\,\frac{3M-m}{M+m}$ 而 $V = u\,\frac{3m-M}{M+m}$，你可以驗證 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2$。

常見錯誤

- 混淆速率與速度：牛頓定律和動量守恆都必須以帶符號速度來寫。到最後才轉換為速率。
- 忘記「再經過 $2n$ 次碰撞」即總共 $2n+1$ 次，所以冪次是 e^{2n+1} 而不是 e^{2n}。
- 為凹槽提供的向心力（centripetal force）而擔心。它垂直於運動方向，所以既不改變速率，也不會出現在碰撞方程之中。

STEP 之外

V 的公式顯示，當 $e<1$ 時，題目給定的假設不可能永遠成立：一旦 $2me^{2n+1}$ 跌至低於 $M-m$，較重的質點便不再反向。這裏的動量只是在旋轉的意義下守恆。凹槽的力總是指向通過圓心的方向，所以真正守恆的量是關於圓心的角動量（angular momentum），而圓的半徑剛好約去。這類源自對稱性的守恆定律，是大學一年級力學的核心主題；Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對角動量和碰撞有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。