詳細解答

STEP I 2010，第 10 題

力學 • 向量運動學

> **STEP I 2010，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q10

關鍵思路

一切都源自對 $\mathbf{r}$ 求導再取點積（dot product）：兩個向量之間的夾角可由 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 求得，而垂直（perpendicular）即表示點積為零。至於第二個質點，關鍵的觀察是：Q 在時刻 t 的位置，正是 P 在時刻 $t-T$ 的位置。把位置寫成複數（complex number）$z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$，最後一部分便化為一行計算。

解答

速度與加速度

記 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$。由乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t))\\ &= \mathrm{e}^t(-2\sin t,\ 2\cos t).\end{aligned}$$

速度與位移之間的夾角

兩者的大小分別為 $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$ 及

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

因為交叉項 $\mp 2\sin t\cos t$ 互相抵消。所以 $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$。點積為

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

因此，若 θ 為 $\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v}$ 之間的夾角，則

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以對任何 t 都有 $\theta = \frac{\pi}{4}$，正如題目所求。（由於 $\mathrm{e}^t > 0$，兩個向量都永不為零，所以夾角恆有定義。）

加速度與位移垂直

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{e}^{2t}[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t] = 0,$$

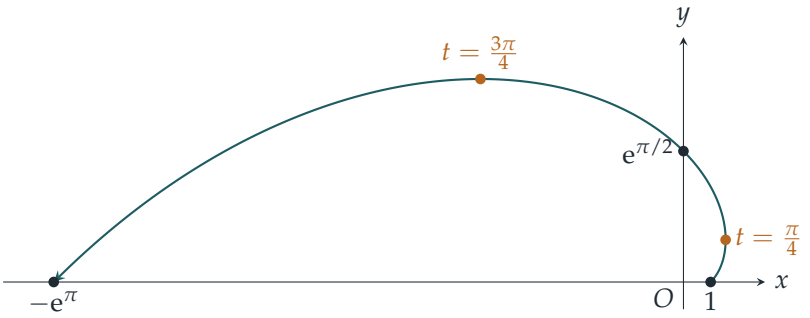
而且兩個向量均非零，所以 $\mathbf{a}$ 恆與 $\mathbf{r}$ 垂直。還可留意，$\mathbf{a} = 2\mathrm{e}^t(-\sin t, \cos t)$ 正是把 $\mathbf{r}$ 旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後再放大至兩倍。

$0 \le t \le \pi$ 時的路徑

在極坐標（polar coordinates）中，路徑為 $r = \mathrm{e}^\theta$，其中 $\theta = t$：質點沿逆時針方向轉動時，與 O 的距離按指數增長，這是一條等角螺線（equiangular spiral），又稱對數螺線（logarithmic spiral）。幾個有用的參考點：

- $t = 0$：位於點 $(1,0)$，沿方向 $(1,1)$ 運動，與 x 軸成 $\frac{\pi}{4}$ 角。
- $t = \frac{\pi}{4}$：$\dot{x} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) = 0$，所以 x 達到最大，位於點 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$。
- $t = \frac{\pi}{2}$：位於點 $(0, \mathrm{e}^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$。
- $t = \frac{3\pi}{4}$：$\dot{y} = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) = 0$，所以 y 達到最大，位於 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$。
- $t = \pi$：位於點 $(-\mathrm{e}^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$，以 $\frac{\pi}{4}$ 角穿過坐標軸，朝左下方前進。

在路徑上每一點，路徑都與由 O 出發的徑向線成 $\frac{\pi}{4}$ 角，其形狀由此確定。



第二個質點

? **想一想** Q 在時刻 t 位於何處？試以 P 的運動來表示。

Q 到達每一點的時間都比 P 遲 T，所以在時刻 t，它正處於 P 在時刻 $t-T$ 的位置：

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = \mathrm{e}^{t-T}\big(\cos(t-T),\, \sin(t-T)\big).$$

於是

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T) \\ &= \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t-2T} - 2\mathrm{e}^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big) \\ &= \mathrm{e}^{2t}\big(1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}\big), \end{aligned}$$

其中用到 $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$。因此

$$|PQ| = k\,\mathrm{e}^{t}, \qquad k = \sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}},$$

而 k 只取決於 T，與 t 無關。所以 P 與 Q 之間的距離與 e^t 成正比，正如題目所求。（括號內的式子等於 $|1-\mathrm{e}^{-T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}|^2$，當 $T\neq 0$ 時為正數，因為 $\mathrm{e}^{-T}\neq 1$；所以 $k>0$。）

*複數版本。*設 $z = x+\mathrm{i}y$，則 P 位於 $z_P = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$，而 Q 位於 $z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(t-T)}$。所以

$$z_P - z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big(1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = \mathrm{e}^t\,|1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}|.$$

這亦顯示 $\overrightarrow{QP}$ 是 z_P 的一個固定複數倍，所以線段 PQ 與 OP 的夾角保持不變：三角形 OQP 的形狀始終如一，只是不斷放大和轉動。

驗算

- 對 $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ 求導，得 $\dot z = (1+\mathrm{i})z$ 及 $\ddot z = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$。乘以 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 相當於旋轉 $\frac{\pi}{4}$，乘以 $2\mathrm{i}$ 則相當於旋轉 $\frac{\pi}{2}$：最初的兩個結果一目了然。
- 以數值驗證：隨機選取 t，$\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v}$ 之間的夾角算得 $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$，且 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$。取 $T=1$ 時，在所有測試過的 t 值上都有 $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$，與 $\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-1}\cos 1+\mathrm{e}^{-2}}$ 吻合。
- 當 $T\to 0$ 時，$k\approx T\sqrt{2}$，所以 $|PQ|\approx\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$，即在時間 T 內走過的距離，理應如此。

常見錯誤

- 把 Q 的位置當作 $\mathbf{r}(t+T)$：Q 在 P 的後面，所以它位於 $\mathbf{r}(t-T)$。（答案仍然與 e^t 成正比，但常數不同。）
- 把螺線畫成順時針方向轉動，或者畫成路徑經過原點。質點與 O 的距離為 $\mathrm{e}^t \geq 1$，並隨着質點沿逆時針方向運動而增加。

STEP 之外

曲線 $r = \mathrm{e}^\theta$ 就是對數螺線：以 O 為中心把它縮放，所得的曲線都是它本身旋轉後的結果，這正是相交角保持不變、以及 OQP 形狀不變的原因。在大學一年級的課程中，平面上的運動常以極坐標單位向量 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ 來處理；在這套表示法下，本題的徑向加速度 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 等於零，直接得出垂直的結論。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是為這類問題而發展極坐標的方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。