詳細解答

STEP I 2010，第 1 題

純數學 • 配方法

STEP I 2010，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q1

關鍵思路

這個恆等式（identity）把一個不易處理的二次式改寫成兩個平方之和再加一個常數。只要留意到第二條方程也可以用同樣的兩個括號 $x-y+2$ 和 $2x-y$ 來表示，問題就變成兩個新未知數的兩條簡單方程。這兩條方程對新未知數的平方而言是線性的，所以可以直接求解。

解答

恆等式

展開右邊，

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad =a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad =(a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

由於這是恆等式，我們可以與 $5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y$ 比較係數（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned}
x: &\quad 4a = 4, && \text{所以} a = 1;\\
y: &\quad -4a = -4, && \text{與上式吻合;}\\
y^2: &\quad a + b = 2, && \text{所以} b = 1;\\
xy: &\quad 2bc - 2a = -6, && \text{所以} 2c = -4,\ c = -2;\\
x^2: &\quad a + bc^2 = 5, && \text{驗算：} 1 + 4 = 5;\\
\text{常數項}: &\quad 4a + d = 0, && \text{所以} d = -4.
\end{aligned}$$

注意，單憑 x^2 的係數只能得出 $c^2 = 4$；決定正負號的是 xy 的係數。所以

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = -2, \qquad d = -4,$$

即

$$5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y \equiv (x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 4,$$

其中我們把 $(-2x + y)^2$ 寫成 $(2x - y)^2$。

聯立方程

根據恆等式，第一條方程變成

$$(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 13.$$

想一想 第二條方程看來不一樣。它可以用同樣的兩個括號來表示嗎？

它含 x 和 y 的一次項是 $8x - 8y$，是第一條方程的兩倍。這提示我們試試 $2(x - y + 2)^2$，它的一次項正好相符：

$$2(x - y + 2)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 8y + 8.$$

左邊餘下的部分是

$$6x^2 + 3y^2 - 8xy + 8x - 8y - 2(x - y + 2)^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy - 8 = (2x - y)^2 - 8.$$

所以第二條方程是 $2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 8 = 14$，即

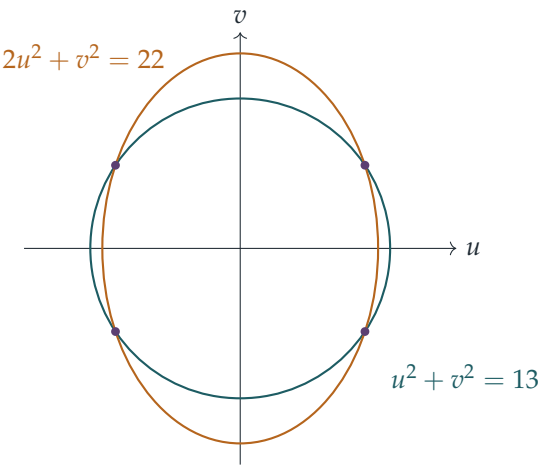
$$2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 22.$$

（你也可以沿用求恆等式的方法，在 $\alpha(x - y + 2)^2 + \beta(\gamma x + y)^2 + \delta$ 中比較係數而得出這個結果。）

現在設 $u = x - y + 2$ 及 $v = 2x - y$。方程組變成

$$u^2 + v^2 = 13, \qquad 2u^2 + v^2 = 22.$$

兩式相減得 $u^2 = 9$，於是 $v^2 = 4$。所以 $u = \pm 3$ 及 $v = \pm 2$，兩者的正負號可獨立選取，共得四組 (u, v)。



要還原為 x 和 y，可以相減：$v - (u - 2) = (2x - y) - (x - y) = x$，所以

$$x = v - u + 2, \qquad y = 2x - v = v - 2u + 4.$$

每組 (u, v) 恰好對應一組 (x, y)，因為這個變數代換（change of variables）是線性而且可逆的。四個解如下：

u	v	x	y
3	2	1	0
3	−2	−3	−4
−3	2	7	12
−3	−2	3	8

所以

$$(x, y) = (1, 0), \quad (-3, -4), \quad (7, 12), \quad (3, 8).$$

驗算

代入 $(1, 0)$：第一條方程得 $5 + 4 = 9$，第二條得 $6 + 8 = 14$。對於 $(7, 12)$：$245 + 288 - 504 + 28 - 48 = 9$ 及 $294 + 432 - 672 + 56 - 96 = 14$。電腦已在一千個隨機有理點上驗

證這兩個恆等式，並確認四組解全部滿足兩條方程。以窮舉法搜尋所有滿足 $|x|, |y| \leq 50$ 的整數對，找到的正好就是這四個解。兩條圓錐曲線（conic）最多相交於四點，所以我們不可能有所遺漏。

常見錯誤

- 由 $c^2 = 4$ 直接取 $c = 2$，而沒有核對 xy 的係數。
- 只取正平方根，結果只找到一個解而不是四個。
- 直接從原來的方程消去一個變數。這樣會得出一條四次方程（quartic），用手計算非常費力。

STEP 之外

把二次型（quadratic form）寫成平方的組合，是二次型理論的起點。把對稱矩陣（symmetric matrix）對角化（diagonalise），總可以找到一個線性變數代換，把 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 化為 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$，而圓錐曲線正是這樣分類的。這一題的兩條方程碰巧共用同一對平方，所以才能如此乾淨俐落地分離開來。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）清楚講解了對稱矩陣和二次型。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。