詳細解答

STEP III 2009，第 9 題

力學 • 拋體軌道的角度

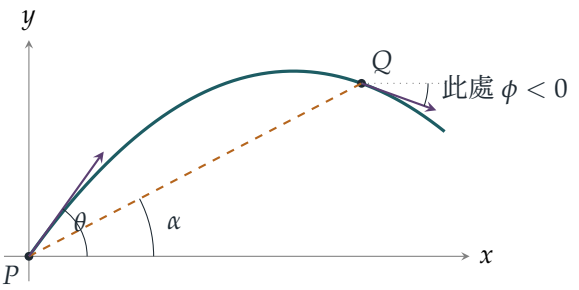
> **STEP III 2009，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q9

關鍵思路

在拋體運動（projectile motion）中，水平速度始終不變，而垂直速度則以恆定的變率改變。因此，由 P 到 Q 之間的平均垂直速度，就是它在兩端的值的平均數，而弦（chord）PQ 的斜率（gradient）就是兩端斜率的平均數。這樣一行就得出第 (i) 部分。至於第 (ii) 部分，軌跡（trajectory）方程是 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic）（只要把 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ 代入），餘下的工作交給根之和與根之積（sums and products of roots）便可。

解答

我們把質點（particle）視為在恆定重力 g 之下自由運動，不計空氣阻力（air resistance）。取 P 為原點，x 軸沿水平正方向，y 軸垂直向上。設 u 為拋射速率，並設 $Q = (X, Y)$。我們假設 $X > 0$：Q 位於 P 的正方向一側，所以水平速度 $u\cos\theta$ 為正，而所有角 $\theta, \phi, \theta', \phi'$ 都在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內。（假如 Q 在 P 的正上方或正下方，在 P 和 Q 的角便都是 $\pm\frac{\pi}{2}$，題目就沒有任何內容可言。）於是 $\tan\alpha = Y/X$。



第 (i) 部分

水平速度恆為 $u\cos\theta$。垂直速度在 P 是 $u\sin\theta$，在 Q 設為 v_Q，並且以恆定的變率 g 遞減，所以它是時間的線性函數（linear function）。因此，若由 P 飛行到 Q 需時 T，則

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

因為線性函數在一個區間上的平均值，就是它兩個端點值的平均數。在每一點，運動方向就是速度的方向，所以 $\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$ 及 $\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$。兩式相除，得

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

即 $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$，正是所求。

第 (ii) 部分

二次方程。 從 $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ 中消去 t，得軌跡

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta).$$

記 $k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$，它是正數。由於路徑通過 (X, Y)，$T = \tan\theta$ 滿足

$$kT^2 - XT + (Y + k) = 0.$$

第二條軌跡有相同的 u、X 和 Y，所以 $\tan\theta'$ 滿足同一條方程。兩條軌跡並不相同，所以 $\theta \neq \theta'$；又因為 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一對一（one-to-one）的，$\tan\theta$ 和 $\tan\theta'$ 就是那兩個根。因此

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y+k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

第一個結果。 由複角公式（compound-angle formula），

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

這裏需要 $Y \neq 0$。若 $Y = 0$（於是 $\alpha = 0$，而 $\cot\alpha$ 無定義），兩根之積為 1，這表示 $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$，也就是大家熟悉的情況：在水平地面上，射程相同的一對拋射角互為餘角（complementary angles）。從這個意義上說，結果依然成立。

第二個結果。 記 $t = \tan\alpha = Y/X$ 及 $s = \tan\theta + \tan\theta' = X/k$。於是 $Y/k = ts$，所以 $\tan\theta\tan\theta' = 1 + ts$。把第 (i) 部分分別應用於兩條軌跡，得

$$\tan\phi = 2t - \tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t - \tan\theta'.$$

所以

$$\tan\phi+\tan\phi'=4t-s,$$
$$1-\tan\phi\tan\phi'=1-(4t^2-2ts+\tan\theta\tan\theta')=1-4t^2+2ts-1-ts=t(s-4t).$$

這兩個量不可能同時為零：若 $\tan\phi'=-\tan\phi$，則 $\tan\phi\tan\phi'=-\tan^2\phi\le 0\neq 1$。當 $Y\neq 0$（於是 $t\neq 0$）且 $s\neq 4t$ 時，

$$\tan(\phi+\phi')=\frac{4t-s}{t(s-4t)}=-\frac{1}{t}=-\cot\alpha=\tan(\theta+\theta').$$

在其餘情況下，要麼 $1-\tan\phi\tan\phi'$ 和 $1-\tan\theta\tan\theta'$ 同時為零($t=0$)，要麼 $\tan(\phi+\phi')$ 和 $\tan(\theta+\theta')$ 同為無窮大，所以在任何情況下，$\phi+\phi'$ 與 $\theta+\theta'$ 要麼正切相同，要麼同為 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍。無論如何，

$$\theta+\theta'-(\phi+\phi')=n\pi\quad\text{對某個整數}n.$$

想一想 正切相等，只能把角確定到相差 π 的某個倍數。我們怎樣知道這個倍數剛好是一個 π？

我們利用各角的大小。在每條軌跡上，斜率是 $\tan\theta-\dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$，它隨 x 增加而嚴格遞減。由於 $X>0$，我們得到 $\tan\phi<\tan\theta$，所以 $\phi<\theta$；同理 $\phi'<\theta'$。四個角全都在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之內，所以 $0<\theta-\phi<\pi$ 及 $0<\theta'-\phi'<\pi$。兩式相加，

$$0<n\pi=(\theta+\theta')-(\phi+\phi')<2\pi,$$

所以 $n=1$，而 $\theta+\theta'=\pi+\phi+\phi'$，正是所求。

驗算

- 取 $X=1$、$Y=\frac{1}{2}$ 及 $u^2=4g$，則 $k=\frac{1}{8}$。二次方程變成 $T^2-8T+5=0$，其根為 $4\pm\sqrt{11}$。於是 $\tan(\theta+\theta')=8/(1-5)=-2=-\cot\alpha$。以數值計算，$\theta+\theta'\approx 2.0344$ 而 $\pi+\phi+\phi'\approx 2.0344$，其中 $\tan\phi=1-\tan\theta$ 及 $\tan\phi'=1-\tan\theta'$。
- 水平地面（$Y=0$）：$\theta+\theta'=\frac{\pi}{2}$，而根據對稱性，$\phi=-\theta$、$\phi'=-\theta'$。所以 $\pi+\phi+\phi'=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，與預期相符。
- 我們以數值方法逐步模擬運動，確認了第 (i) 部分；又隨機選取 20,000 組容許兩條軌跡存在的 u、X 和 Y，檢驗了第 (ii) 部分的兩個結果。

常見錯誤

- 單憑正切相等就斷定 $\theta+\theta'=\pi+\phi+\phi'$。正切相等只能把角確定到相差 π 的某個倍數，你需要不等式 $\phi<\theta$ 和 $\phi'<\theta'$ 才能判定是哪一個倍數。

▶ 忘記說明為甚麼 $\tan\theta$ 和 $\tan\theta'$ 是同一條二次方程的兩個不同的根。它們不同，是因為兩條軌跡不同，而 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一對一的。

STEP 之外

第 (ii) 部分可以從可逆性（reversibility）的角度作一個頗為有趣的解讀。把任何一條路徑倒過來走，就得到一個由 Q 到 P、以角 $\phi + \pi$ 拋出的拋體。所以這四個角是由兩端之間的一種對稱性聯繫起來的，而關係式 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ 正好把它表達出來。牛頓（Newton）定律（在沒有摩擦力或阻力的情況下）的時間反演對稱性（time-reversal symmetry），是貫穿整個大學力學的主題。若想看大學一年級程度、對拋體以至更多課題的透徹論述，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學導論）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。