詳細解答

STEP III 2009，第 8 題

純數學 • 極限與歸約公式

> **STEP III 2009，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 4.5 節大二學生之夢中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/sophomores-dream.html

關鍵思路

每一部分都圍繞着對數（logarithm）的「弱」：在 0 附近，$\ln x$ 趨向無窮的速度極慢，以致 x 的任何正數次冪都能壓倒 $\ln x$ 的任何次冪。代換（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ 把這件事化為題目給出的事實：指數函數勝過冪函數。分部積分（integration by parts）時，正是這個極限（limit）令邊界項（boundary term）消失。在最後一部分，把指數函數的級數（series）用於 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$，得出的恰好就是第 (ii) 部分的積分。

解答

第 (i) 部分

由於 $\ln x$ 只在 $x > 0$ 時有定義，這個極限的意思是 $x \to 0^+$。設 $x = \mathrm{e}^{-t}$，則 $\ln x = -t$，而 $x \to 0^+$ 恰好相當於 $t \to \infty$。於是

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

因子 $(-1)^n$ 只是一個固定的正負號，而根據題目給出的結果，當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{e}^{-mt} t^n \to 0$。因此

$$\lim_{x \to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

至於第二個結果，取 $m = n = 1$：由此得當 $x \to 0$ 時 $x \ln x \to 0$。由於指數函數是連續

（continuous）的，

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{當} x \to 0,$$

這正是所要證明的。

第 (ii) 部分

首先，這個積分是有意義的。被積函數（integrand）$x^m(\ln x)^n$ 在 $(0,1]$ 上連續，而且根據第 (i) 部分，當 $x \to 0$ 時它趨向 0。所以它在 $(0,1]$ 上有界（bounded），I_n 是一個普通的（收斂（convergent）的）積分。

對 I_{n+1} 作分部積分，取 $u = (\ln x)^{n+1}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$，於是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$ 及 $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$：

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

想一想 在 $x = 0$ 處，$\ln x$ 根本沒有定義，那麼該處的邊界項是甚麼？

下限其實是指 $x \to 0^+$ 時的極限。根據第 (i) 部分，以 $m+1$ 和 $n+1$ 代替 m 和 n（兩者都符合條件，因為 $m+1 \geq 1$ 及 $n+1 \geq 0$），可得 $x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$。在上限處，$\ln 1 = 0$ 而 $n+1 \geq 1$，所以該項也是 0。因此方括號內的一項為零，於是

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1}\,I_n,$$

這正是所要證明的。

要計算 I_n，由

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

出發。遞推關係（recurrence）的每一步都乘以 $-\dfrac{k}{m+1}$，其中 $k = 1, 2, \ldots, n$，所以

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

（用一行歸納法（induction）便可確認：若結果對 n 成立，則由遞推關係得 $-\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$。）

第 (iii) 部分

對於 $0 < x \leq 1$，寫 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$，並使用指數級數：

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}.$$

（函數在 $x = 0$ 處的值不影響積分；根據第 (i) 部分，函數 x^x 在該處趨向 1，所以它有界，這個積分是普通的積分。）

現在逐項積分（integrate term by term）。$n = 0$ 的一項是 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$。對於 $n \geq 1$，第 n 項就是第 (ii) 部分的 I_n，其中 $m = n$（符合條件，因為此時 m 是正整數）：

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

這條公式在 $n = 0$ 時同樣給出 1。所以

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

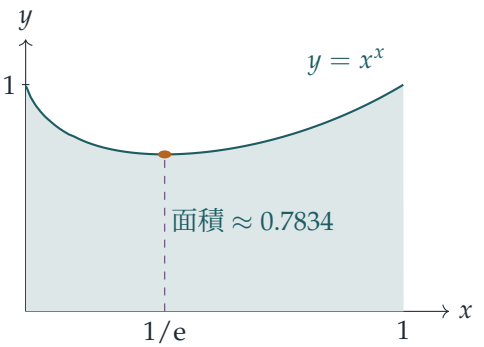
這就是所求的結果。

想一想 我們可以對無窮級數逐項積分嗎？

並非必然可以，但在這裏是穩妥的，因為 $x\ln x$ 始終很小。它的導數是 $\ln x + 1$，所以在 $(0,1]$ 上它在 $x = 1/\mathrm{e}$ 處取得最小值，而且 $|x\ln x| \leq 1/\mathrm{e} < 1$。設 $u = x\ln x$，若在 u^N 項之後截斷級數，則餘項（remainder）滿足

$$\left|\sum_{n>N}\frac{u^n}{n!}\right| \leq \sum_{n>N}\frac{|u|^n}{n!} \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n!} \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

對 $(0,1]$ 內的每一個 x 都成立。在長度為 1 的區間上積分，截斷後逐項積分的誤差最多是 $2/(N+1)!$，而它趨向 0。所以積分等於級數的和。



驗算

- 在第 (ii) 部分取 $m = 1$、$n = 1$：$\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$，與直接分部積分的結果一致（$[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$）。
- 數值上，用中點法則（midpoint rule）可得 $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x \approx 0.7834305$，而部分和（partial sums）$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \cdots$ 只需寥寥數項便穩定於 0.7834305，因為各項縮小得極快。
- 圖像位於其最小值 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.69$ 與 1 之間，所以面積必定介乎 0.69 與 1 之間，事實亦確是如此。

常見錯誤

- 不加說明便略去 0 處的邊界項。這正是第 (i) 部分的全部用意，而且需要 $m + 1 \geq 1$。
- 弄錯 I_n 的正負號：在 $(0, 1)$ 上 $\ln x < 0$，所以 I_n 的正負號與 $(-1)^n$ 相同。
- 在第 (iii) 部分忘記 $n = 0$ 的一項，而首項的 1 正是由此而來。

STEP 之外

最後這條恆等式稱為「二年級生之夢」（sophomore's dream），由約翰·伯努利（Johann Bernoulli）於 1697 年發現。我們需要論證的那一步，即交換積分與無窮求和的次序，是大學一年級分析課的核心課題：當級數一致收斂（converges uniformly）時，這樣做是穩妥的，而我們的餘項估計所證明的正是這一點（它是魏爾斯特拉斯 M 判別法（Weierstrass M-test）的一個例子）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對一致收斂以及逐項積分何時可行，有十分易讀的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。