詳細解答

STEP III 2009，第 7 題

純數學 • 逐次微分與數學歸納法

STEP III 2009，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q7

關鍵思路

一切都源自一條看似平平無奇的恆等式（identity）：$(1+x^2)f_0(x)=1$。把它反覆求導，就會得出相鄰各階導數（derivative）之間的關係式；而對某個 n 成立的關係式，再求導一次便得到下一條，這正好就是歸納步驟的模樣。在第 (ii) 部分，乘以 $1+x^2$ 的適當次冪便可消去所有分母，再用第二次歸納法（induction）追蹤首項，從而確定次數。

解答

第 (i) 部分

把 $f_n(x)$ 簡記為 f_n，並以 $P(n)$ 表示以下命題：

$$(1+x^2)f_{n+1}+2(n+1)xf_n+n(n+1)f_{n-1}=0.$$

基礎情況（*base case*）。由於對所有 x 都有 $(1+x^2)f_0=1$，求導（並利用 $f_0'=f_1$）得

$$(1+x^2)f_1+2xf_0=0.$$

再求導一次，對每一項使用積法則（product rule），

$$(1+x^2)f_2+2xf_1+2xf_1+2f_0=0, \qquad \text{即} \qquad (1+x^2)f_2+4xf_1+2f_0=0,$$

這就是 $P(1)$。

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個 $n\geq 1$，$P(n)$ 對所有 x 成立。由於它是關於 x 的

恆等式，我們可以對它求導。利用 $f_k' = f_{k+1}$，

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

因為 $2+2(n+1) = 2(n+2)$ 及 $2(n+1)+n(n+1) = (n+1)(n+2)$。這就是 $P(n+1)$。因此根據歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立，證明完畢。

（等價地，也可以用萊布尼茲法則（Leibniz's rule）把 $(1+x^2)f_0 = 1$ 求導剛好 $n+1$ 次：由於 $1+x^2$ 的三階導數為零，只有三項會留下來，而它們正是 $P(n)$ 的三項。）

第 (ii) 部分

首三個。我們有 $P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$。其次，

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{所以} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

用商法則（quotient rule）對 f_1 求導，

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

所以 $P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$。（在第 (i) 部分取 $n = 1$ 會得到相同的結果：$(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$。）

遞歸關係（recurrence）。用積法則對 $P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$ 求導：

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

全式乘以 $1+x^2$，每一項都會變成一個 P：

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

移項後，

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

對每個 $n \geq 0$ 成立，證明完畢。這裏不需要用歸納法；這是對每個 n 都成立的直接計算。

> **想一想** 我們怎樣知道次數恰好是 n，而不會因為最高次項互相抵消而變得更小？

我們證明一個稍強的命題，讓它把所需的資料一路帶過整個歸納過程：P_n 是一個 n 次多項式（*polynomial*），其首項係數（*leading coefficient*）$a_n \neq 0$。$n = 0$ 的情況成立，因為 $P_0 = 1$。

假設命題對某個 $n \geq 0$ 成立，即 $P_n = a_n x^n +$ (較低次冪)，其中 $a_n \neq 0$。根據遞歸關係，

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

右邊是一個多項式，因為 P_n 是多項式，所以 P_n' 也是。現在 $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$（當 $n = 0$ 時這是 0，與 $na_n = 0$ 吻合），所以 $(1+x^2)P_n'$ 的次數至多為 $n+1$，而 x^{n+1} 的係數是 na_n。另外，$2(n+1)xP_n$ 的次數為 $n+1$，首項係數是 $2(n+1)a_n$。因此 P_{n+1} 的次數至多為 $n+1$，而它的 x^{n+1} 係數是

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

這個數不等於零，因為 $a_n \neq 0$ 而 $n+2 > 0$。所以最高次項不可能抵消，P_{n+1} 的次數恰好是 $n+1$。根據歸納法，對每個 $n \geq 0$，P_n 都是 n 次多項式。

額外的收穫是：由 $a_{n+1} = -(n+2)a_n$ 及 $a_0 = 1$ 可得 $a_n = (-1)^n(n+1)!$，與上面的 $a_1 = -2$ 和 $a_2 = 6$ 吻合。

驗算

- 第 (i) 部分，取 $x = 0$、$n = 1$：由 P_n 可得 $f_0(0) = 1$、$f_1(0) = 0$、$f_2(0) = -2$，而 $f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$。
- 遞歸關係，取 $n = 1$：$(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$。
- 數值上，在 $x = 0.7$ 處，中心差分（central difference）給出 $f_0''(0.7) \approx 0.284164$，而 $(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$。我們亦以有理數運算，在 200 個隨機有理點上精確驗證了第 (i) 部分和遞歸關係，直至 $n = 12$。

常見錯誤

- 所證明的基礎情況與題目指定的範圍不符：第 (i) 部分的恆等式由 $n = 1$ 開始，所以基礎情況必須是 $n = 1$，這需要用到 f_2。
- 只說「次數每次增加一」，卻沒有檢查 $(1+x^2)P_n'$ 與 $2(n+1)xP_n$ 的 x^{n+1} 項不會互相抵消。它們的確不會抵消，因為 $n \neq 2(n+1)$，但這一點必須寫出來。

STEP 之外

利用複數（complex numbers）把它分解成部分分式（partial fractions），$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$，每一階導數都變得容易計算，並得出閉合形式（closed form）$P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \operatorname{Im}(x+\mathrm{i})^{n+1}$（不妨用 $n = 1, 2$ 試試）。再設 $x = \cot\theta$，便可看出 P_n 的零

點是 $\cot \frac{k\pi}{n+1}$，其中 $k = 1, \ldots, n$：全部都是實數而且互不相同，就像經典正交多項式（orthogonal polynomials）的零點一樣，而那些多項式同樣是由反覆對一個簡單函數求導而產生的。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是個絕佳的去處，可以從中看到複數為何能把這類計算變得服服貼貼。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。