詳細解答

STEP III 2009，第 6 題

純數學 • 托勒密定理

> **STEP III 2009，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q6

關鍵思路

單位圓（unit circle）上兩點之間的距離只取決於兩點之間的夾角，而求這個距離的竅門是抽出「平均」角：$e^{i\beta} - e^{i\alpha}$ 等於 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ 乘以一個純虛數（purely imaginary number）。一旦把每條弦（chord）都寫成半角差的正弦，那條大恆等式就變成一條三角恆等式（trigonometric identity），用積化和差公式（product-to-sum formulae）兩三行便可解決。這四點於是構成一個內接於圓的四邊形，而該恆等式正是關於這種四邊形的一條著名定理。

解答

弦長

抽出因子 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$：

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

由於 $|e^{i(\alpha+\beta)/2}| = 1$ 及 $|2i| = 2$，

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\,|\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)|.$$

最後，由 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ 得 $0 < \frac{1}{2}(\beta - \alpha) < \pi$，所以正弦值為正，模（modulus）的符號可以除去：$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$，此即所求。

? **想一想** 為甚麼題目要設 $\alpha < \beta$ 這個條件？

若沒有這個條件，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ 便可能落在 $(-\pi,0)$ 之內，正弦值為負，公式就會給出負的長度。正是因為各角按大小排列，我們才可以除去模的符號。另外留意 $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}| = |e^{i\beta}-e^{i\alpha}|$，所以模內兩項的次序並不重要。

恆等式

因為 $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta<2\pi$，恆等式中出現的每一對角都是由小至大排列的，所以第一個結果適用於全部六個模。兩邊同除以公因子 $2\cdot 2=4$ 後，我們需要證明

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)=\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

最自然的變量是相鄰兩點之間的三個間距。設

$$x=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\qquad y=\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta),\qquad z=\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

則 $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=x+y$、$\frac{1}{2}(\delta-\beta)=y+z$ 及 $\frac{1}{2}(\delta-\alpha)=x+y+z$。要證明的是

$$\sin x\sin z+\sin y\sin(x+y+z)=\sin(x+y)\sin(y+z).$$

對每個乘積使用 $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$：

$$\begin{aligned}2\sin x\sin z&=\cos(x-z)-\cos(x+z),\\ 2\sin y\sin(x+y+z)&=\cos(x+z)-\cos(x+2y+z),\\ 2\sin(x+y)\sin(y+z)&=\cos(x-z)-\cos(x+2y+z).\end{aligned}$$

把首兩行相加，$\cos(x+z)$ 項互相抵消，剛好得到第三行。因此這條三角恆等式成立（事實上對所有 x,y,z 都成立），再乘回 4 並使用弦長公式，便得

$$|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|\,|e^{i\gamma}-e^{i\delta}|+|e^{i\beta}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\alpha}-e^{i\delta}|=|e^{i\alpha}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\beta}-e^{i\delta}|,$$

此即所求。

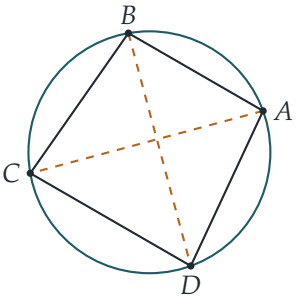
想一想 這條三角恆等式對所有 x、y、z 都成立。那麼我們在哪裏用到 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ 這個次序？

就在把每個模換成 $2\sin$(半角差) 而不加模符號的那一步。假如各點的次序亂了，其中一些正弦值便會是負數，各長度之間的恆等式一般就不成立。例如取角度為 $0.3, 2, 1, 4$（即 $\gamma<\beta$），左邊約為 4.84，右邊約為 1.15。

詮釋

設 A,B,C,D 為點 $e^{i\alpha},e^{i\beta},e^{i\gamma},e^{i\delta}$。它們都在單位圓上，而各角的大小次序表示沿逆時針方向走時，我們會依次遇上 A,B,C,D。所以 $ABCD$ 是一個（凸的）圓內接四邊形（cyclic quadrilateral），邊為 AB,BC,CD,DA，對角線為 AC、BD，而恆等式說的是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$



任何圓都可以由單位圓經縮放和平移得出，而等式兩邊按相同的倍數（即縮放因子的平方）縮放，所以這個結果對每個圓內接四邊形都成立：在圓內接四邊形中，兩組對邊乘積之和等於兩條對角線的乘積。這就是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。

驗算

- 內接於單位圓的正方形（$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$）邊長為 $\sqrt{2}$，對角線長為 2：$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$。
- 邊長為 a, b 的長方形給出 $a^2 + b^2 =$ (對角線)^2：托勒密定理包含了畢氏定理(Pythagoras' theorem)。
- 數值上，隨機抽取 10^5 組按大小排列的四個角，兩邊之差都不超過 2×10^{-15}。

常見錯誤

- 寫下 $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ 而沒有檢查正弦值是否為正。
- 用複角公式（compound-angle formulae）把 $\sin \frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ 等各項按原來的四個角展開：這樣做是行得通的，但比使用三個間距 x, y, z 繁複得多。
- 忘記恆等式要求各頂點按環繞圓周的次序排列：右邊的是兩條對角線，而不是隨便兩條弦。

STEP 之外

對於處於一般位置的四點，同樣的量只滿足托勒密不等式（Ptolemy's inequality）$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$，等號成立當且僅當四點按該次序共圓（concyclic）；有一個巧妙的證明，用的是複數恆等式 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$ 和三角不等式（triangle inequality）。這背後是交比（cross-ratio），它是莫比烏斯變換（Möbius transformations）下的不變量，而莫比烏斯變換把圓映射到圓，是複幾何的核

心。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像直觀講解複分析）把這些想法闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。