詳細解答

STEP III 2009，第 5 題

純數學 • 根的對稱函數

> **STEP III 2009，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q5

關鍵思路

這一題的一切都圍繞着三個基本對稱函數（elementary symmetric functions）

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

因為一旦知道它們的值，x、y 和 z 就是一條已知三次方程（cubic）$t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$ 的根。每一項新資料，都是把兩個已知的冪和（power sums）相乘，再看看出現了哪些交叉項而得來的。遞推關係（recurrence）則可由這條三次方程直接得出：x、y、z 各自滿足該方程，所以它們的各次冪也同樣滿足。

解答

設 $S_n = x^n + y^n + z^n$，則已知 $S_1 = 1$、$S_2 = 2$、$S_3 = 3$。

$yz + zx + xy$ 的值

把 S_1 平方，

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

所以 $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$，由此得

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

正如所求。

$\sum x^2y$ 的值，然後是 xyz

設 $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$，即所有形如（一個變數的平方）×（另一個不同的變數）的六項之和。把 S_2 乘以 S_1 會得到九項：三個立方項和 T 的六項：

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

因此 $2 \times 1 = 3 + T$，於是

$$T = -1,$$

這就是第二個結果。

> **想一想** 已知的量當中，哪兩個相乘會同時包含 T 和 xyz？

試試 $(x + y + z)(yz + zx + xy)$。展開後得到九項。其中六項的形狀是 $x \cdot xy = x^2y$，而這些正好就是 T 的六項。其餘三項是 $x \cdot yz$、$y \cdot zx$ 和 $z \cdot xy$，每一項都等於 xyz。所以

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

代入已知的值，$1 \times (-\frac{1}{2}) = -1 + 3xyz$，所以 $3xyz = \frac{1}{2}$，而

$$xyz = \frac{1}{6},$$

正如所求。

遞推關係

現在我們知道 $e_1 = 1$、$e_2 = -\frac{1}{2}$ 和 $e_3 = \frac{1}{6}$。由於

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{6},$$

x、y、z 各自都是這條三次方程的根。特別地，

$$x^3 = x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6},$$

y 和 z 亦同樣如此。乘以 x^{n-2} 得

$$x^{n+1} = x^n + \tfrac{1}{2}x^{n-1} + \tfrac{1}{6}x^{n-2},$$

把 x 換成 y 或 z 也有同樣的式子。把三條等式相加，

$$S_{n+1} = S_n + \tfrac{1}{2}S_{n-1} + \tfrac{1}{6}S_{n-2},$$

所以

$$a = 1, \qquad b = \tfrac{1}{2}, \qquad c = \tfrac{1}{6}.$$

想一想 「對所有 n」這個條件，在負數次冪上會否出問題？

當 $n \geq 2$ 時，乘以 x^{n-2} 並無問題。對於較小的 n，我們需要用到 x、y 和 z 的負數次冪，而這些冪是存在的，因為三者都不是零：它們的積是 $\frac{1}{6} \neq 0$。所以這個關係對每一個整數 n 都成立。（即使 x、y、z 並非全是實數，它仍然成立，而事實上它們的確不全是實數：這條三次方程有一個實根，約為 1.431，另有兩個互為共軛的複數根（complex conjugate roots）。）

驗算

- 取 $n = 2$ 時，遞推關係應該重現已知的數據，當中用到 $S_0 = 3$：果然 $S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$。
- 遞推關係預測 $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$ 及 $S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$。以數值方法解這條三次方程（根為 1.43085 和 $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$），再把四次冪和五次冪分別相加，得到 4.16667 和 6.00000，兩者吻合。這些根在 n 為負數時同樣滿足遞推關係。

常見錯誤

- 弄錯三次方程中的正負號：它是 $t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3$，所以這裏 $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$ 而 $c = e_3 = \frac{1}{6}$。
- 在 $n = 2$ 檢驗遞推關係時，忘記了 $S_0 = 3$，而不是 1。

STEP 之外

這些就是牛頓恆等式（Newton's identities），它們把冪和與基本對稱函數聯繫起來，適用於任意數目的變數。在它們背後的是*對稱多項式基本定理*（fundamental theorem of symmetric polynomials）：每一個以 $x_1, \ldots, x_k$ 為變數的對稱多項式，都是 $e_1, \ldots, e_k$ 的多項式。S_n 的遞推關係是一個線性遞推關係（linear recurrence），其特徵方程（characteristic equation）正是那條三次方程本身；同一個想法可用來解線性差分方程（linear difference equations），並給出斐波那契（Fibonacci）數列的通項公式。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）正是本着這種精神來闡述多項式及其根。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。