詳細解答

STEP III 2009，第 4 題

純數學 • 拉普拉斯變換

STEP III 2009，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q4

關鍵思路

第 (i) 至 (iii) 部分各自只需對定義所用的積分（integral）施以一行微積分運算：(i) 只是把兩個指數函數合併，(ii) 是代換法（substitution），而 (iii) 是分部積分法（integration by parts）。第 (iv) 部分可以連續兩次分部積分來完成，但更簡潔的做法是使用 (iii) 兩次，讓 sin 和 cos 的變換互相確定對方。至於最後一部分，可把目標 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ 看成分三步構造而成：$\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$，每一步都是四個結果的其中之一。

解答

以 $\mathcal{L}[g](s)$ 表示函數 g 的拉普拉斯變換（Laplace transform），於是 $F = \mathcal{L}[f]$。「合適」是指有關積分收斂（converge）；特別地，我們假設對 $s > 0$，當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$。

第 (i) 部分

把指數函數合併，

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-bt}f(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

這正是 F 的定義在 $s+b$ 處的取值。由於 $s+b > 0$，這一步是成立的。

第 (ii) 部分

代入 $u = at$，於是 $t = u/a$ 及 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$。由於 $a > 0$，積分上下限 0 和 ∞ 保持不變，所以

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u}f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

這裏同樣用到 $s/a > 0$。

第 (iii) 部分

使用分部積分法，對 e^{-st} 求導，對 $f'(t)$ 積分：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \Big[\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (0 - f(0)) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

其中上限處的項為零，因為當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$（這是 f 為合適函數的條件之一）。

第 (iv) 部分

設 $S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$ 及 $C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$。對 $s > 0$，兩個積分都收斂，因為 $|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$，cos 的情況亦類似；而且 $\mathrm{e}^{-st}\sin t$ 和 $\mathrm{e}^{-st}\cos t$ 都趨向 0，所以 (iii) 對兩者均適用。

取 $f = \sin$ 應用 (iii)，其導數（derivative）為 cos，且 $\sin 0 = 0$：

$$C(s) = sS(s).$$

取 $f = \cos$ 應用 (iii)，其導數為 $-\sin$，且 $\cos 0 = 1$：

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

（$-\sin t$ 的變換是 $-S(s)$，因為常數因子可以直接提到積分號外。）把第一條方程代入第二條，

$$-S(s) = s^2S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

這正是所需的結果。順帶可得

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

最後一部分

> **想一想** 怎樣才能不作任何新的積分，就把 $\sin t$ 變成 $\cos qt$？

求導把 sin 變成 cos（這是 (iii)），把 t 重新縮放會把 $\cos t$ 變成 $\cos qt$（這是 (ii)），而乘以一個指數函數就是 (i)。所以我們分三步進行。

第 1 步：$\cos t$。由 (iii)，取 $f(t) = \sin t$，並以 (iv) 的結果作為 F，

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s\cdot\frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

（這就是第 (iv) 部分順帶得到的結果。）

第 2 步：$\cos qt$。由 (ii)，取 $f(t)=\cos t$ 及 $a=q>0$，

$$\mathcal{L}[\cos qt](s)=\frac{1}{q}\cdot\frac{s/q}{(s/q)^2+1}=\frac{1}{q}\cdot\frac{sq}{s^2+q^2}=\frac{s}{s^2+q^2}.$$

第 3 步：$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$。由 (i)，取 $f(t)=\cos qt$ 及 $b=p>0$，我們把 s 換成 $s+p$：

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt](s)=\frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}}\qquad (s>0).$$

驗算

- 令 $p\to 0$ 及 $q=1$，得 $s/(s^2+1)$，即第 1 步中 $\cos t$ 的變換。令 $q\to 0$，得 $1/(s+p)$，而事實上 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t=1/(s+p)$。
- 當 $s\to\infty$ 時，$sF(s)\to 1=\cos 0$，這是必然的：當 s 很大時，權重 $s\mathrm{e}^{-st}$ 集中在 $t=0$ 附近，所以 $sF(s)$ 趨向函數在 0 處的值。
- 數值上，取 $s=1$、$p=\frac{1}{2}$、$q=2$，公式給出 $1.5/6.25=0.24$，而對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule）所得的結果與此吻合。電腦亦在隨機選取的參數值下驗證了 (i) 至 (iv) 及最終答案，誤差在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 在 (ii) 中，遺漏了由 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u/a$ 而來的因子 $1/a$，或把 $F(s/a)$ 寫成 $F(as)$。
- 在第 3 步中，只平移了部分的 s：每一個 s 都要變成 $s+p$，所以分子是 $s+p$，而不是 s。
- 在 (iii) 中弄錯 $f(0)$ 的正負號：邊界項是 $0-f(0)$。

STEP 之外

這些法則正是以拉普拉斯變換法求解微分方程（differential equation）的核心：(iii) 把求導變成乘以 s，於是一條常係數線性常微分方程（linear ODE with constant coefficients）就變成關於 $F(s)$ 的代數方程，你把它解出來，然後在一個由本題這類結果編成的表中「查表」即可。平移法則 (i) 正好解釋了為甚麼阻尼振盪（damped oscillation）$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ 會表現為位於 $s=-p\pm \mathrm{i}q$ 的極點（pole）。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）有一整章講述這個方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。