詳細解答

STEP III 2009，第 3 題

純數學 • 極限與曲線描繪

STEP III 2009，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q3

關鍵思路

這個函數在 $t = 0$ 處沒有定義，純粹是因為出現了 $0/0$，所以冪級數（power series）可以告訴我們它在該處「應該」取甚麼值。第 (ii) 部分只需把各項通分，寫在公分母（common denominator）之上；當中出現的偶函數（even function）其實就是喬裝了的 $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$。至於第 (iii) 部分，$f'(t)$ 的正負完全取決於它的分子，而這個分子恰好就是 $\mathrm{e}^t(1-t)-1$，這正是題目給出該不等式的原因。

解答

第 (i) 部分

利用 $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$，當 $t \neq 0$ 時可以約去一個因子 t：

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{當} t \to 0,$$

因為分母趨向 1。所以 $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$。

由商法則（quotient rule），

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

分子和分母都趨向 0，所以把兩者分別展開。分子是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= (t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots) - (t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

而分母是 $(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots)^2 = t^2(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2$。把分子和分母同除以 t^2，

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{當} t \to 0.$$

第 (ii) 部分

設 $g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$。通分後，

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{2t + t(\mathrm{e}^t - 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

現在以 $-t$ 代替 t，再把分子和分母同乘以 e^t：

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t} + 1)}{2(\mathrm{e}^{-t} - 1)} = \frac{-t\,(1 + \mathrm{e}^t)}{2(1 - \mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = g(t).$$

所以 $f(t) + \frac{1}{2}t$ 是偶函數，正如題目所求。（把分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{t/2}$，可見 $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$，是兩個奇函數（odd function）之積，這是另一個看出此結果的方法。）

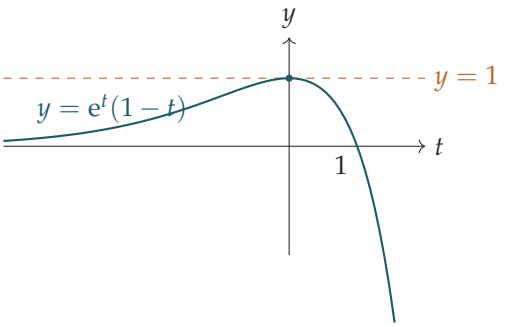
這對繪畫草圖有一個有用的推論：$f(t) - f(-t) = -t$，所以 f 的圖像就是一個偶函數的圖像被直線 $y = -\frac{1}{2}t$ 傾斜而成。

第 (iii) 部分

設 $h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$。則

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

它在 $t < 0$ 時為正，在 $t > 0$ 時為負。所以 h 一直遞增至 $t = 0$，其後遞減：它唯一的轉向點（turning point）是極大點，$h(0) = 1$。此外，當 $t \to -\infty$ 時 $h(t) \to 0$，而當 $t > 1$ 時 $h(t) < 0$。



曲線在 $t = 0$ 處與 $y = 1$ 相切，在其餘各處都嚴格位於其下方，所以

$$\mathrm{e}^t(1-t) \le 1, \quad \text{等號成立當且僅當} t = 0.$$

想一想 這個不等式怎樣告訴我們有關 $f'(t)$ 的資訊？

再看一次第 (i) 部分中 $f'(t)$ 的分子：

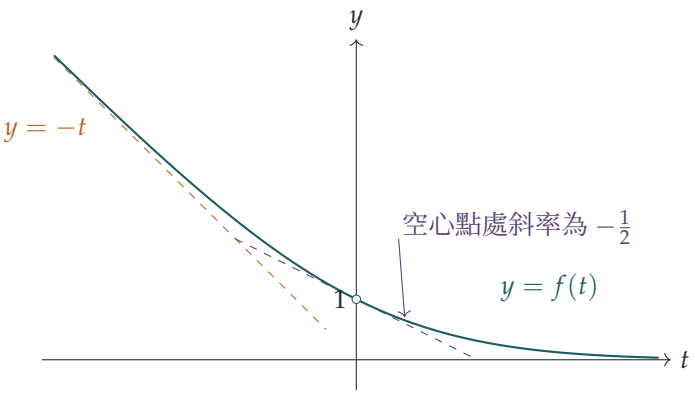
$$e^t - 1 - te^t = e^t(1-t) - 1.$$

根據上面的嚴格不等式，當 $t \neq 0$ 時它嚴格為負。分母 $(e^t-1)^2$ 在 $t \neq 0$ 時嚴格為正。因此對所有 $t \neq 0$ 都有 $f'(t) < 0$；特別地，$f'(t) \neq 0$，所以 f 沒有駐點（stationary point），並且在 0 的兩側都是遞減的。

f 的草圖

把各項事實整理如下。

- 對所有 $t \neq 0$ 都有 $f(t) > 0$，因為 t 與 $e^t - 1$ 同號。
- 在 0 附近，圖像以斜率 $-\frac{1}{2}$ 趨近 $(0,1)$（第 (i) 部分）；該點本身並不在圖像上，因為 $f(0)$ 沒有定義。
- f 處處遞減（第 (iii) 部分）。
- 當 $t \to \infty$ 時，$f(t) = t/(e^t-1) \to 0^+$，因為指數函數的增長勝過 t。
- 當 $t \to -\infty$ 時，$f(t) + t = \dfrac{te^t}{e^t-1} \to 0$，所以 $y = -t$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote）。這也可由第 (ii) 部分得出：$f(t) = f(-t) - t$ 而 $f(-t) \to 0$。



驗算

- 第 (ii) 部分預測 $f(-1) - f(1) = 1$。以數值計算，$f(1) = 1/(e-1) \approx 0.58198$ 而 $f(-1) = e/(e-1) \approx 1.58198$，兩者之差恰好是 1。

- 把 $t = \pm 10^{-4}$ 代入導數公式，得 -0.49998 和 -0.50002，與極限 $-\frac{1}{2}$ 吻合。
- 由 coth 的形式可得，當 t 很小時 $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$，所以 $f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$，與第 (i) 部分的兩個極限都相符。

常見錯誤

- 對 $f'(t)$ 用了一次洛必達法則（L'Hôpital's rule）後，遇到另一個 $0/0$ 便停下來。把分子和分母都展開至 t^2 階，就可避免這個問題。
- 只證明了 $\mathrm{e}^t(1-t) \leq 1$，便聲稱 $f'(t) \neq 0$。你需要該不等式在 $t \neq 0$ 時是嚴格的，而這是由 $t = 0$ 是 h 唯一的駐點得出的。
- 繪畫草圖時把 $(0,1)$ 畫成實心點：f 在該處並無定義。

STEP 之外

展開式 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ 定義了伯努利數（Bernoulli numbers）B_n。第 (i) 部分表明 $B_0 = 1$ 和 $B_1 = -\frac{1}{2}$，而第 (ii) 部分表明對每個奇數 $n \geq 3$ 都有 $B_n = 0$。這些數出現在歐拉—麥克勞林求和公式（Euler–Maclaurin summation formula）、冪和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$，以及歐拉（Euler）關於 $\sum 1/n^{2k}$ 的公式之中。把像 $t = 0$ 處那樣的「洞」補上，正是可去奇點（removable singularity）的概念；若想看極限與連續性的嚴謹論述，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。