詳細解答

STEP III 2009，第 2 題

純數學 • 冪級數解

> **STEP III 2009，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q2

關鍵思路

若 y 是冪級數（power series），則 y'、y'' 和 x^3y 也是冪級數，而微分方程（differential equation）所說的，就是把它們合併而成的一個冪級數恆等於零。一個對所有 x 都等於零的冪級數，每個係數（coefficient）都必定是零，於是微分方程就化為一連串聯繫各個 a_n 的簡單方程。真正要下工夫的是整理工作：在比較係數之前，先把求和指標平移，使每個級數都以 x 的同一個冪寫出。

解答

第 (i) 部分

逐項求導（term-by-term differentiation）（題目已說明所有級數均收斂，所以我們視此做法為可行），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ 的一項 a_0 是常數，其導數為 0，所以求和由 $n = 1$ 開始：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

這就是所要求的結果。再做一次，y' 中 $n = 1$ 的一項 a_1 是常數，所以

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

逐項寫出至 a_3：

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots.$$

第 (ii) 部分

我們把 $xy'' - y' + 4x^3y$ 的每一項都寫成以 x^{n-1} 表示的級數。首先，

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

這個和式中 $n = 1$ 的一項本應是 $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$，所以也可以讓它由 $n = 1$ 開始。於是

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1) - n]a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

至於最後一項，$4x^3y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$，代入 $m = n - 4$ 便可令冪次變成 x^{n-1}：

$$4x^3y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

想一想 為甚麼我們可以比較係數？

方程說的是：在級數收斂的區間內，對每一個 x 都有 $xy'' - y' + 4x^3y = 0$，所以合併後的冪級數在該區間上是零函數。一個收斂的冪級數若在某區間上恆等於零，則它的所有係數必定都是零（代入 $x = 0$ 得出常數項，除以 x，然後重複這個步驟）。因此 x 的每個冪的係數都必須等於零。

各係數如下：

- x^0（$n = 1$）：$1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$，所以 $a_1 = 0$，正如所求。
- x^1（$n = 2$）：$2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$，此式自動成立，所以 a_2 可任意取值。
- x^2（$n = 3$）：$3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$，所以 $a_3 = 0$。
- x^{n-1}，其中 $n \geq 4$：$n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$。

由於當 $n \geq 4$ 時 $n(n-2) \neq 0$，我們可以除以它，從而得到

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

正如所求。（a_0 也可任意取值，因為沒有任何方程單獨涉及它。）

$a_0 = 1$、$a_2 = 0$ **的情況**。 這個遞推關係（recurrence relation）只把 a_n 與 a_{n-4} 聯繫起來，所以各係數按 n 模（modulo）4 的餘數分成四條鏈。由 $a_1 = 0$、$a_2 = 0$ 和 $a_3 = 0$ 開始的三條鏈全部為零，所以只有 a_{4k} 可能不等於零。代入 $n = 4k$，其中 $k \geq 1$，

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

由 $a_0 = 1$ 出發，每一步都乘以 -1，並除以階乘（factorial）中接下來的兩個因數，所以

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

（驗算：$a_4 = -\frac{1}{2}$，$a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$。）因此

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

這裏用到馬克勞林級數（Maclaurin series）$\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$，並取 $u = x^2$。這就是所要求的結果。

$a_0 = 0$、$a_2 = 1$ **的情況**。 這次由 a_0、a_1 和 a_3 開始的三條鏈全部為零，只有 a_{4k+2} 保留下來。代入 $n = 4k+2$，其中 $k \geq 1$，

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

再由 $a_2 = 1$ 得 $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$。所以

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

驗算

直接代入。對於 $y = \sin(x^2)$，有 $y' = 2x\cos(x^2)$ 和 $y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$，所以

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$ 的情況亦同樣成立。數值上，餘弦級數在 $x = 1.2$ 處的首 40 項之和為 0.1304237…，與 $\cos(1.44)$ 吻合。此外，兩個答案在 $x = 0$ 處都合理：$\cos 0 = 1 = a_0$，而在 0 附近 $\sin(x^2) \approx x^2$，所以 $a_2 = 1$。

常見錯誤

- 未平移指標就比較係數，以致把一個級數中的 a_n 與另一個級數中的 a_n 配對，儘管它們所乘的是 x 的不同冪。

- 忘記 $a_3 = 0$，而這正是消去 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$ 這條鏈所必需的。
- 除以 $n(n-2)$ 時沒有指出它在 $n \geq 4$ 時不等於零。當 $n = 2$ 時它等於零，這正是 a_2 可任意取值的原因。

STEP 之外

這是弗羅貝尼烏斯方法（method of Frobenius）最簡單的形式。點 $x = 0$ 是這個方程的正則奇點（regular singular point），因為 y'' 的係數在該處等於零；一般理論解釋了為甚麼單憑一個普通的冪級數在這裏行得通，而在別的情況下有時卻會失敗（指標根（indicial roots）0 和 2 相差一個整數）。同樣的方法可以得出貝塞爾函數（Bessel functions）和勒讓德函數（Legendre functions）。要嚴格論證逐項求導的合理性，需要用到一致收斂（uniform convergence），那是大學一年級分析課的內容。關於這兩個課題，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。