詳細解答

STEP III 2009，第 12 題

概率與統計 • 概率生成函數

> **STEP III 2009，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q12

關鍵思路

在第 (i) 部分，每擲一輪，硬幣數目的期望值（expectation）便減半，但擲的次數本身是隨機的，所以我們以它為條件（conditioning）：已知上一輪的數目，下一輪的數目便服從二項分佈（binomial distribution），其平均值很容易求得。這樣各個期望值便構成一個等比數列（geometric sequence）。在第 (ii) 部分，總數是若干個獨立同分佈（independent, identically distributed）部分之和，而概率生成函數（probability generating function）可把「獨立變量之和」化為「生成函數之積」。

解答

第 (i) 部分

每次擲出正面的概率為 $\frac{1}{2}$，且各次獨立，所以 $X_1 \sim \mathrm{B}(k, \frac{1}{2})$，並且

$$\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{2}k.$$

已知 $X_1 = x_1$ 時，Albert 會重新擲 x_1 次，各次互相獨立，所以 $X_2 \mid X_1 = x_1 \sim \mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$，並且

$$\mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

（若 $x_1 = 0$，他一次也不擲，$X_2 = 0$，與上式吻合。）對 X_1 所有可能的取值求平均，由全期望定律（law of total expectation）得

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{x_1=0}^{k} \mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_1=0}^{k} x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{4}k,$$

正如所求。

想一想 為甚麼不能直接說「X_2 服從 $\mathrm{B}(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$」？

因為第二輪擲的次數是隨機變量（random variable）X_1，而不是數值 $\frac{1}{2}k$；事實上 $\frac{1}{2}k$ 甚至不一定是整數。以 X_1 為條件，擲的次數才得以固定，這時才可以使用二項分佈的平均值。

完全相同的論證適用於每一個階段：已知 $X_i = x_i$ 時，$X_{i+1} \sim \mathrm{B}(x_i, \frac{1}{2})$，所以 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_i)$。由歸納法（induction）得

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{2^i} \qquad (i \geq 1),$$

再把這個等比級數（geometric series，公比為 $\frac{1}{2}$）求和，得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_i) = k\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots\right) = k.$$

第 (ii) 部分

就一枚硬幣而言，$Y_i = n$ 表示先擲出 n 次正面，然後擲出一次反面，所以

$$\mathrm{P}(Y_i = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

它的概率生成函數是一個等比級數，在 $|t| < 2$ 時收斂（convergent）：

$$G_{Y_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} t^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2 - t}.$$

這 k 枚硬幣是分開擲的，所以 $Y_1, \ldots, Y_k$ 互相獨立，而獨立變量之和的生成函數等於各自生成函數之積。因此

$$G_Y(t) = \mathrm{E}(t^{Y_1 + \cdots + Y_k}) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}(t^{Y_i}) = (2 - t)^{-k}.$$

平均值與方差（variance）。 求導數，得

$$G_Y'(t) = k(2 - t)^{-k-1}, \qquad G_Y''(t) = k(k+1)(2 - t)^{-k-2},$$

所以 $G_Y'(1) = k$ 及 $G_Y''(1) = k(k+1)$。因此

$$\mathrm{E}(Y) = G_Y'(1) = k,$$

而且，由於 $G_Y''(1) = \mathrm{E}(Y(Y-1))$，

$$\mathrm{Var}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - (G_Y'(1))^2 = k(k+1) + k - k^2 = 2k.$$

分佈。 $\mathrm{P}(Y=r)$ 是 $G_Y(t)$ 中 t^r 的係數。寫成

$$G_Y(t) = 2^{-k}\left(1-\tfrac{1}{2}t\right)^{-k},$$

並使用負指數的二項級數（binomial series，在 $|t|<2$ 時成立）：

$$(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}x^r.$$

（其係數為 $\dfrac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$，即 $\binom{k+r-1}{r}$。）取 $x=\frac{1}{2}t$，得

$$\mathrm{P}(Y=r) = \binom{k+r-1}{r}\frac{1}{2^{k+r}}, \qquad r=0,1,2,\ldots$$

想一想 有沒有方法可以直接看出這條公式？

有。設想把所有擲幣結果排成一長列：$Y=r$ 表示第 k 次反面出現在第 $k+r$ 次擲幣。這樣一個由 $k+r$ 次擲幣組成的特定序列，概率為 $2^{-(k+r)}$，而最後一次必定是反面，所以我們只需選擇首 $k+r-1$ 次擲幣中哪 r 次是正面：共有 $\binom{k+r-1}{r}$ 種方法。這就是負二項分佈（negative binomial distribution）。

驗算

- 當 $k=1$ 時，$\mathrm{P}(Y=r)=2^{-(r+1)}$，即單一硬幣的幾何分佈（geometric distribution），而 $\mathrm{E}(Y)=1$、$\mathrm{Var}(Y)=2$，正是 $p=\frac{1}{2}$、由 0 起計的幾何變量為人熟悉的數值。
- $G_Y(1)=1$，這是每個生成函數都必須滿足的。
- 當 $k=2$ 時，$\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{4}$（兩枚硬幣第一次都擲出反面），而 $\mathrm{P}(Y=1)=\binom{2}{1}\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$（一枚硬幣先正面後反面，另一枚擲出反面：有兩種次序，每種的概率為 $\frac{1}{8}$）。
- 以分數作精確計算，已核實對於 $k\le 7$ 及 $i<40$ 有 $\mathrm{E}(X_i)=k/2^i$（所以部分和趨近 k），並且對於 $k\le 6$，$\mathrm{P}(Y=r)$ 的公式、平均值 k 及方差 $2k$ 均正確。

常見錯誤

- 取 $\mathrm{P}(Y_i=n)=(\frac{1}{2})^n$，忘記了最後的那次反面；這樣各概率之和便是 2。
- 使用 $\mathrm{Var}(Y)=G''(1)-\big(G'(1)\big)^2$，漏了 $G'(1)$ 一項，結果得出 k 而不是 $2k$。
- 把係數寫成 $\binom{k+r}{r}$：最後一次擲幣已固定為反面，所以只有 $k+r-1$ 次擲幣可以自由選擇。

STEP 之外

第 (i) 部分是一個分支過程（branching process）：每個「個體」（一次正面）在下一代有隨機數目的「後代」，這裏後代數目服從 $\mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$，而由於後代數目的平均值小於 1，這個族羣終會滅絕。取條件的那一步 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_{i+1} \mid X_i)\big)$ 就是塔性質（tower property），而在大學一年級的課程中，會證明 X_i 的生成函數是後代生成函數的 i 重複合（composition）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）對生成函數和分支過程均有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。