詳細解答

STEP III 2009，第 11 題

力學 • 變質量運動

> **STEP III 2009，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q11

關鍵思路

當質量會改變時，$F = ma$ 並不是正確的定律：我們必須使用「力 = 動量（momentum）的變化率」。塵埃本身是靜止的，所以它沒有帶來任何動量，而彗星的動量 $M(1+bx)v$ 只會因外力而改變。這樣馬上便得到一個首次積分（first integral）。再寫成 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，它就變成一條可分離變量方程（separable equation），其解是一條關於 x 的二次方程。

解答

我們把彗星視為一個質點（particle）。它所收集的塵埃原本是靜止的，所以不會為彗星帶來動量，而作用於整個系統（彗星加上已收集的塵埃）的唯一的力，就是沿運動方向的引力 Mf。

第 (i) 部分

當 $f = 0$ 時沒有外力，所以動量守恆（conserved）。進入塵埃雲時動量為 MV；在時間 t 時動量為 $M(1+bx)v$。因此

$$(1+bx)\,v = V.$$

現在代入 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 並分離變量：

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

其中用到了 $x = 0$ 當 $t = 0$。所以 $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$，而由於 $x \geq 0$，我們要取平方根為正的那個根：

$$x = \frac{\sqrt{1+2bVt} - 1}{b}.$$

第 (ii) 部分

現在外力是 Mf，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(1+bx)v] = Mf.$$

由於 M 和 f 都是常數，由 0 積分至 t 可得 $M(1+bx)v - MV = Mft$（在 $t=0$ 時，$x=0$ 且 $v=V$）。因此

$$v = \frac{ft+V}{1+bx},$$

這正是所求。

? **想一想** 為甚麼我們不能直接寫 $M(1+bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$？

那條方程忽略了把每一粒新塵埃由靜止加速至速率 v 所需的動量。積法則（product rule）顯示出兩者的分別：動量的變化率是 $M(1+bx)\dot{v} + Mb\dot{x}\,v$，而第二項正正就是這個「追上去」的代價。

與第 (i) 部分一樣，寫成 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 並分離變量：

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs+V)\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

所以 $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$，再次取非負根，得

$$x = \frac{\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1}{b}.$$

（設 $f=0$ 便回到第 (i) 部分的結果。）

恆定速率。彗星以恆定速率 V 運動，當且僅當對所有 t 都有 $x = Vt$，即 $\sqrt{1+bft^2+2bVt} = 1+bVt$。兩邊平方，這要求

$$1 + bft^2 + 2bVt = 1 + 2bVt + b^2V^2t^2 \quad \text{對所有}t,$$

而這恰好在 $f = bV^2$ 時成立。此時 $v = \dfrac{bV^2t+V}{1+bVt} = V$，所以在這個選擇下彗星確實以恆定速率運動：引力剛好提供了加速它所掃起的塵埃所需的動量。

極限速率。一般而言，利用由 x 的公式得出的 $1+bx = \sqrt{1+bft^2+2bVt}$，

$$v = \frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}} = \frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}} \longrightarrow \frac{f}{\sqrt{bf}} = \sqrt{\frac{f}{b}} \quad \text{當}t\to\infty,$$

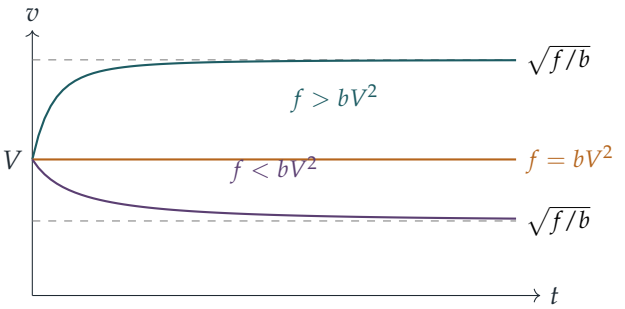
其中我們把分子和分母同除以 $t>0$，並用到了 $bf>0$（我們需要 $f>0$，因為力是沿運動方向作用的）。所以速率趨向常數 $\sqrt{f/b}$。

想一想 這與恆定速率的情況一致嗎？

一致：若 $f = bV^2$，則 $\sqrt{f/b} = V$，即彗星一直以來的速率。事實上，對 v^2 求導可得

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{2(ft + V)(f - bV^2)}{(1 + 2bVt + bft^2)^2},$$

所以若 $f > bV^2$，速率會穩步上升趨向 $\sqrt{f/b}$；若 $f < bV^2$，速率會穩步下降趨向它；若 $f = bV^2$，速率則保持為 V。



驗算

- 單位：b 的單位是 1/長度，而 f 是加速度，所以 f/b 的單位是速率的平方，$\sqrt{f/b}$ 則是速率；bft^2 和 bVt 都是無量綱（dimensionless）的，在平方根內也必須如此。
- 取 $b = 1$、$V = 1$、$f = 3$，以數值方法逐步計算方程 $\dot{x} = p/(1 + bx)$、$\dot{p} = f$，結果與 x 和 v 的公式吻合至小數點後八位，而在 $t = 10^6$ 時速率為 $1.7320508\ldots \approx \sqrt{3}$。
- 當 $b \to 0$（沒有塵埃）時，$x = \left(\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} - 1\right)/b \to \frac{1}{2}ft^2 + Vt$，即常見的勻加速結果。

常見錯誤

- 對質量正在改變的物體使用 (質量) $\times\, \dot{v} =$ 力。
- 取了二次方程的負根，結果得出 $x < 0$。
- 對動量方程積分時，忘記了積分常數（constant of integration）MV。

STEP 之外

變質量問題是大學一年級的經典課題：同樣的動量帳目可推出火箭方程（rocket equation），而雨點穿過雲層下墜時不斷增大，所引出的方程也與這裏的十分相似。極限速率 $\sqrt{f/b}$ 是一個終端速度（terminal velocity），此時力剛好抵銷動量耗用於新增質量的速率。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對變質量系統有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。