詳細解答

STEP III 2009，第 10 題

力學 • 簡諧運動

STEP III 2009，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q10

關鍵思路

題目給出平衡(equilibrium)時的壓縮量 d，是為了讓我們無須另外設定彈簧的勁度(stiffness）也能知道它的大小：平衡時彈簧的力與重量互相抵消，所以 $k/m = g/d$。之後，由牛頓第二定律（Newton's second law）可知，運動是以平衡位置為中心的簡諧運動(simple harmonic motion），而下落高度 h 只透過初速度影響結果。當彈簧再也無法推動質點時，質點便離開彈簧，這發生在壓縮量回到零的一刻。

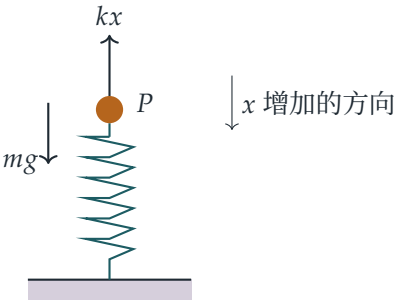
解答

微分方程

把 P 視為質量為 m 的質點（particle），彈簧視為輕彈簧（light spring），服從胡克定律(Hooke's law)，勁度為 k，並忽略空氣阻力。當 P 靜止在彈簧上時，作用於它的力是向下的重量 mg 和向上的彈簧力 kd，所以

$$kd = mg, \qquad \text{即} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

現在考慮質點從高處落下的情況。取 x 向下為正（它就是壓縮量），並以碰到彈簧的一刻為 $t = 0$。當 P 與彈簧接觸時，作用於它的力如圖所示。



由於彈簧是輕的，它施於 P 的力恰好是向上的 kx（輕彈簧會把兩端所受的力原封不動地傳遞過去）。取向下為正，由牛頓第二定律得 $m\ddot{x} = mg - kx$，所以

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

解方程

這是以 $x = d$ 為中心的簡諧運動，其中

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

常數 $x = d$ 是一個特解（particular solution），而餘函數（complementary function）是 $B\cos\omega t + C\sin\omega t$，所以通解（general solution）是

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

初始條件（initial conditions）來自下落的過程。在 $t = 0$ 時質點剛剛碰到彈簧，所以 $x(0) = 0$；而 P 已自由下落了高度 h，所以它的速率是 $\sqrt{2gh}$，方向向下，亦即 x 增加的方向。因此

$$\begin{aligned} x(0) = d + B = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) = C\omega = \sqrt{2gh} \quad &\Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

所以

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

分離的時刻

想一想 P 究竟在甚麼時候失去接觸？

彈簧並沒有繫在 P 上，所以它只能推，不能拉。作用於 P 的接觸力就是彈簧力 kx，當 $x > 0$ 時它保持為正，而當 x 回到 0 時它降至零，此時 P 正在向上運動。假如運動越

過這一點後仍按原來的方程進行，彈簧便要提供向下的拉力，但它做不到。所以 T 是使 $x = 0$ 的第一個正的時刻。

要求出這個時刻，可把振動的部分寫成單一個餘弦。設 $R = \sqrt{d^2 + 2hd}$，並以下式定義銳角 φ：

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

於是 $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$，而 $\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$。那麼 $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$，並且

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

所以 $x = 0$ 當且僅當 $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$。當 t 由 0 開始增加時，角 $\omega t + \varphi$ 由 φ 出發，而在區間 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$ 上有 $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$，所以在該處 $x > 0$。餘弦值第一次回到 $\cos\varphi$ 是在

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{即} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

除以 $\omega = \sqrt{g/d}$，得

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

這正是所求的結果。

驗算

- 若 $h = 0$，質點是以零速率放在處於自然長度(natural length)的彈簧上，此時 $\varphi = 0$，而 $T = 2\pi\sqrt{d/g}$：剛好是一個完整的週期（period），之後 P 以零速率回到最高點。這完全正確。
- 當 $h \to \infty$ 時，$\varphi \to \frac{\pi}{2}$ 而 $\omega T \to \pi$：速度極快的質點只在彈簧上停留半個週期，因為與振幅（amplitude）相比，平衡位置的偏移 d 變得微不足道。
- 根據能量守恆（energy conservation），P 離開時的速率應為 $\sqrt{2gh}$。事實上 $\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$。
- 數值上，取 $d = 0.1\,\mathrm{m}$、$h = 0.2\,\mathrm{m}$ 和 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 逐步模擬這個運動，得出接觸時間為 0.411 s，與公式吻合。隨機選取的 d 和 h 值亦吻合至小數點後六位。

常見錯誤

- 從平衡位置量度位移，卻忘記了題目中的 x 是壓縮量，結果得出 $A = 0$。
- 把初速率取為 $\sqrt{2gh}$，但正負號弄錯了：向下才是 x 增加的方向。

- 假設分離發生在平衡位置 $x = d$，或發生在半個週期之時。其實彈簧會一直推着質點，直至回復自然長度為止。

STEP 之外

這是單邊約束（unilateral constraint）最簡單的例子：彈簧能推而不能拉。運動在不同階段服從不同的微分方程，而各階段之間靠位置和速度的吻合來銜接，正如本題中自由下落階段與彈簧階段的銜接一樣。同樣的想法貫穿了碰撞和彈跳系統的理論。想進一步了解振子（oscillator），以及上文驗算中所用的那類能量方法，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。