詳細解答

STEP III 2009，第 1 題

純數學 • 圓的坐標幾何

STEP III 2009，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

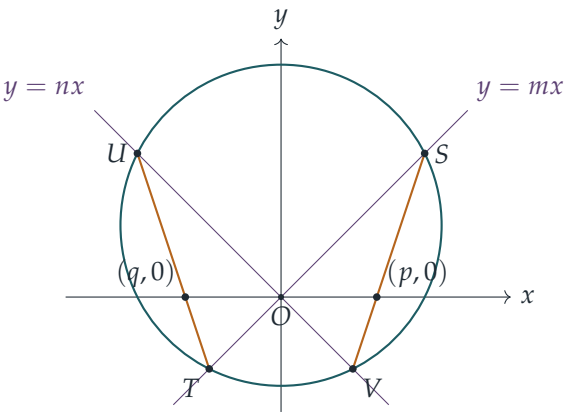
step.maths.org/questions/09-s3-q1

關鍵思路

四個點全部位於通過原點的直線上，所以每個點都可以用一個數來描述：它的 x 坐標。把圓與直線 $y = mx$ 相交，會得到一條二次方程（quadratic），它的兩個根就是 s 和 t；我們始終不需要求出這兩個根本身，只需要它們的和與積。最後的恆等式（identity），來自把 $p + q$ 的分子適當分組，使當中只出現 st、$s + t$、uv 和 $u + v$。

解答

在整個解答中，S 和 T 位於直線 $y = mx$ 上，U 和 V 位於 $y = nx$ 上，兩條直線都通過原點 O。我們假設 $m \neq n$（否則四個點全在同一條直線上），並假設 SV 和 UT 都不是水平線，使它們確實與 $y = 0$ 相交；即 $ms \neq nv$ 及 $mt \neq nu$。



截距 p 和 q

通過 $S(s, ms)$ 和 $V(v, nv)$ 的直線，斜率（gradient）為 $\dfrac{nv - ms}{v - s}$，所以線上的點滿足

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}(x - s).$$

代入 $y = 0$ 和 $x = p$，得 $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$，所以

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

這正是所要求的結果。（若 $v = s$，直線 SV 是鉛垂線，所以 $p = s$；公式仍然給出 $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$。）

直線 UT 把 $y = mx$ 上的 $T(t, mt)$ 與 $y = nx$ 上的 $U(u, nu)$ 連起來，情況與 SV 連接 S 和 V 完全一樣。把 s 換成 t，v 換成 u，得

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

s 和 t 所滿足的二次方程

點 (x, mx) 位於 $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 上，當且僅當 $x^2 + (mx - c)^2 = r^2$，即

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

s 和 t 都滿足這條方程。取 S 和 T 為該直線與圓的兩個（相異）交點，則 s 和 t 就是方程的兩個根，所以根據根與係數的關係（relations between roots and coefficients），

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

證明 $p + q = 0$

對直線 $y = nx$ 作同樣的論證，可知 u 和 v 是 $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$ 的兩個根，所以

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

現在把兩個截距通分相加：

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

? **想一想** 分子同時涉及 s, t, u, v 四個量，我們該怎樣把它馴服？

把它展開，再按係數 m 或 n 把各項配對：

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= mstv-nsuv+mstu-ntuv \\ &= mst(u+v)-nuv(s+t). \end{aligned}$$

現在每一項都是我們已知的對稱函數（symmetric function）。代入後，

$$\begin{aligned} mst(u+v)-nuv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2}-n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)}-\frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)}=0. \end{aligned}$$

根據我們的假設，分母 $(ms-nv)(mt-nu)$ 不等於零，所以 $p+q=0$，證明完畢。

驗算

如圖中所示，取 $c=1$、$r^2=5$、$m=1$、$n=-1$。兩條二次方程分別是 $x^2-x-2=0$ 和 $x^2+x-2=0$，所以 $s=2$、$t=-1$，而 $u=-2$、$v=1$。於是 $st=-2=\frac{1-5}{2}$，$s+t=1=\frac{2}{2}$，與預期一致。由 $S(2,2)$ 到 $V(1,-1)$ 的直線斜率為 3，與 $y=0$ 相交於 $p=\frac{4}{3}$，與 $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$ 吻合；由 $U(-2,2)$ 到 $T(-1,-1)$ 的直線則相交於 $q=-\frac{4}{3}$。以電腦隨機選取 16 000 組圓和直線作檢驗，每一次 $|p+q|$ 都小於 10^{-12}。

常見錯誤

- 把點配錯：q 來自 U 和 T，所以應作的代換是 $s\to t$、$v\to u$；若改為對調 $s\leftrightarrow v$，得到的仍然是 p。
- 試圖直接解二次方程，把 s,t,u,v 明確求出來。平方根會令代數運算無從入手；正是 $mst(u+v)-nuv(s+t)$ 這個分組，才令整個式子化簡為零。

STEP 之外

直線 $y=0$ 與圓相交所成的弦（chord），中點是 O，因為圓心 $(0,c)$ 在 y 軸上。所以這道題其實證明了蝴蝶定理（butterfly theorem）：若兩條弦 ST 和 UV 都通過某條弦的中點 O，則 SV 和 UT 與該弦的交點到 O 的距離相等。我們的證明從沒用過 $c^2<r^2$，所以即使 O 在圓外，證明依然成立；這暗示了這個結果真正的歸宿是射影幾何（projective geometry），在那裏它是笛沙格（Desargues）對合定理（involution theorem）的一個特例。Coxeter 與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何學的新探索》）是進一步閱讀的上佳之選。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。