詳細解答

STEP II 2009，第 9 題

力學 • 質心

> **STEP II 2009，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q9

關鍵思路

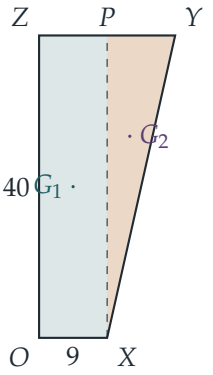
我們需要的每一個距離，都是垂直於同一個固定平面量度的：第 (i) 部分是邊 OZ，第 (ii) 部分是水箱的背面，而背面包含 OZ。因此我們由始至終只需要一個坐標。把每個圖形分割成質心（centre of mass）已知的若干部分（長方形和一個三角形），對該直線或平面取矩（take moments），再除以總質量。水箱的計算方法相同，只是高了一個層次：它的組成部分是兩塊梯形（trapezium）和三塊長方形的金屬薄片，然後再加上一塊液體。

解答

第 (i) 部分

取 O 為原點，x 軸沿 OX，y 軸沿 OZ。於是 $X = (9, 0)$，$Z = (0, 40)$，而且由於 YZ 平行於 OX 且長度為 18，故 $Y = (18, 40)$。驗算一下：$XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$，與題目相符。與 OZ 的距離就是 x 坐標。

由 X 作一條平行於 OZ 的直線，與 ZY 相交於 $P = (9, 40)$。這條線把薄片（lamina）分割成長方形 $OXPZ$ 和直角三角形 XYP。



設薄片每 cm^2 的質量為 1，則質量等於面積。

- 長方形 $OXPZ$：面積為 $9 \times 40 = 360$，中心 G_1 位於 $x = 4.5$。
- 三角形 XYP：面積為 $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$。均勻（uniform）三角形的質心位於三個頂點的平均位置，所以 G_2 的 $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$。

整塊薄片的面積為 540。對 OZ 取矩，

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

所以 $\bar{x} = 7$。質心與 OZ 的距離為 7 cm，正如所求。

第 (ii) 部分

現在設金屬薄片每 cm^2 的質量為 1。背面 $OTWZ$ 位於平面 $x = 0$ 上，而由於闊度 d 的方向垂直於兩個端面，水箱上每一點的 x 坐標都與第 (i) 部分相同。因此我們對背面取矩。每個長方形的面都是均勻的，所以其質心位於其中心，而該中心的 x 坐標與梯形對應邊的中點相同。

組成部分	面積（cm^2）	中心的 x（cm）	矩
兩個端面	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
底面 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
背面 $OTWZ$	$40d$	0	0
正面 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
總計	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

? **想一想** 傾斜的正面，中心在哪裏？

正面是一個長方形，其中一對邊是 XU 和 YV，分別位於 $x = 9$ 和 $x = 18$。它的中心在兩者的正中間，即 $x = 13.5$。計算它的面積時，用的是斜邊長度 $XY = 41$，而不是水平闊度 9。

所以空水箱的

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

每個係數都可被 18 整除：$7560 = 18 \times 420$，$594 = 18 \times 33$，$1080 = 18 \times 60$，$90 = 18 \times 5$。因此

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

這就是所求的與背面的距離。

注滿的水箱

液體注滿一個稜柱（prism），其橫切面（cross-section）是第 (i) 部分的梯形，長度為 d。它的體積是 $540d$，所以按我們的單位，它的質量是 $540dk$（每單位體積的質量是金屬每單位面積質量的 k 倍，而後者我們已取為 1）。每個橫切面都是同一個梯形，所以液體的質心位於 $x = 7$，與第 (i) 部分相同。

當 $d = 20$ 時，水箱的質量為 $1080 + 1800 = 2880$，對背面的矩為 $7560 + 594 \times 20 = 19440$。液體的質量為 $10800k$，矩為 $75600k$。所以注滿的水箱有

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

其中分子和分母已同時除以 720。這就是注滿的水箱的質心與背面的距離。

驗算

- 當 $k = 0$（沒有液體，或液體的密度可忽略不計）時，答案是 $\frac{27}{4} = 6.75$，而空水箱的公式在 $d = 20$ 時同樣得出 $\frac{3\times360}{5\times32} = 6.75$。
- 當 $k \to \infty$ 時，液體佔主導地位，$\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$，即液體本身的質心。
- 答案總是介乎 6.75 與 7 之間，因為它是兩者的加權平均（weighted average），理應如此。例如 $k = 1$ 時得出 $\frac{132}{19} \approx 6.947$。
- 數值驗算（以鞋帶公式（shoelace formula）求梯形的形心（centroid）、以蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算得出 $\bar{x} \approx 6.9994$，以及用精確分數計算兩條水箱公式）與以上所有結果吻合。

常見錯誤

- 計算正面的面積時用了 $9d$ 而不是 $41d$：這個面是傾斜的，所以它的闊度是斜邊長度 XY。
- 因為背面的矩為零而把它漏掉。它仍然為總質量貢獻 $40d$。
- 只計算一個端面，或者給水箱加上蓋。

STEP 之外

這裏我們把圖形分割成中心已知的若干部分，從而求出質心。在大學裏，薄片或立體的質心是用積分來定義的，例如 $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\,\rho\,\mathrm{d}A$，而「分割成若干部分」的方法，不過是「把區域切成幾部分後，積分可以逐部分相加」這個事實而已。同樣的積分還可給出轉動慣量（moment of inertia），它決定物體如何轉動。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這兩個概念都有嚴謹細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。