詳細解答

STEP II 2009，第 7 題

純數學 • 觀察法積分

> **STEP II 2009，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q7

關鍵思路

這類積分乍看無從入手，直到你發現它們恰好是某個函數的導數（derivative）。第一個結果告訴我們 $(x-a)^n \mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2}$ 的導數是甚麼模樣：$(x-a)$ 的冪、指數函數（exponential）、一個三次多項式（cubic），全部除以 $\sqrt{1+x^2}$。所以每個積分（integral）其實都是一道配對練習：讀出 n、a 和 b，再檢查三次多項式是否吻合。當分子中的多項式是四次（quartic）而非三次時，我們就要弄清楚多出來的那一次從何而來。

解答

導數

對三個因式的乘積求導，並寫出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\,n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\,\Big],\end{aligned}$$

這裏我們抽出了公因式 $(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}/\sqrt{1+x^2}$（把首兩項各乘以 $\sqrt{1+x^2}$，使它們置於公分母之上）。展開括號，得

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

由於 $b \neq 0$，x^3 的係數不為零，所以 q 確實是三次多項式。這就是所要求的結果。我們會以下列形式使用它：

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

配對各個因式，我們需要 $a = 4$、$b = 4$ 和 $n - 1 = 14$，所以 $n = 15$。代入這些數值，

$$q(x) = 4x^3 + (16 - 16)x^2 + (4 - 4)x + (15 - 16) = 4x^3 - 1,$$

這正是被積函數（integrand）中的三次多項式。因此由 $(*)$ 得

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

第 (ii) 部分

這次的多項式是四次的，所以它不可能直接就是 q。

> ? **想一想** 一個只會產生三次多項式的公式，怎樣才能容納一個四次多項式？

$(*)$ 中 $(x - a)$ 的冪可以由我們選擇。如果這個四次多項式有因式 $(x - 1)$，我們就可以把它移過去與 $(x - 1)^{21}$ 合併，餘下一個三次多項式。試代 $x = 1$：$12 - 1 - 11 = 0$，所以 $(x - 1)$ 確實是因式，除去後得

$$12x^4 - x^2 - 11 = (x - 1)(12x^3 + 12x^2 + 11x + 11).$$

（你也可以看出它等於 $(x^2 - 1)(12x^2 + 11)$。）因此被積函數是

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

取 $a = 1$、$b = 12$、$n = 23$：

$$q(x) = 12x^3 + (24 - 12)x^2 + (12 - 1)x + (23 - 12) = 12x^3 + 12x^2 + 11x + 11,$$

兩者吻合。故此

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

第 (iii) 部分

多項式同樣是四次的，但這次代入 $x = 2$ 得 $64 + 8 - 2 = 70 \neq 0$，所以 $(x - 2)$ 不是因式，第 (ii) 部分的技巧行不通。

> ? **想一想** 如果 $(x - 2)$ 不是因式，多出來的那一次從何而來？

數一數次數。被積函數的分子次數是 $6 + 4 = 10$，但 $(*)$ 配上 $(x - 2)^6$ 只能給出次數 $6 + 3 = 9$。答案中若多一個因式 x，次數便會增加一，所以不妨試試對 xy 求導，其中 y

是 $a=2$、$b=4$、$n=7$ 時的函數：

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2},\qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

由積法則（product rule），$(xy)'=y+xy'$。把 y 也置於分母 $\sqrt{1+x^2}$ 之上，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

由於 $(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$，括號內的式子是

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

正是我們想要的四次多項式。因此

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

驗算

- 對每個答案求導再作比較：這是最確實的驗算方法，而每一次都只是再用一次 $(*)$（第 (iii) 部分另加積法則）。
- 快速數次數：對一個多項式次數為 d 的答案求導（不計平方根和指數函數），所得分子的次數是 $d+2$。在 (i) 中，$15+2=14+3$；在 (ii) 中，$23+2=21+4$；在 (iii) 中，$8+2=6+4$。
- 數值上，以森遜法則（Simpson's rule）計算 (iii) 的積分在 $[-1,1.2]$ 上的值，得 $-104.41424\ldots$，與 $F(1.2)-F(-1)$ 吻合至約 13 位有效數字，其中 $F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$；(i) 和 (ii) 同樣吻合得很好。

常見錯誤

- 忘記 n 比被積函數中的冪大一：在 (i) 中，答案含 $(x-4)^{15}$，而不是 $(x-4)^{14}$。
- 在 (ii) 中，試圖直接配對四次多項式，然後斷定無解，而沒有先把因式 $(x-1)$ 併入。
- 漏寫積分常數（constant of integration）。

STEP 之外

這裏的方法是「辨認式積分」（integration by recognition）：猜出原函數（antiderivative）的形狀，對它求導，然後比較係數。把這個想法寫成演算法，就成了 Risch 演算法

（Risch algorithm）；電腦代數系統（computer algebra system）用它來判定一個初等函數（elementary function）是否有初等原函數，若有的話便把它求出來。一個相關的想法，是猜一個帶有未知係數、具指定形式的解，這就是求解線性微分方程（linear differential equation）的待定係數法（method of undetermined coefficients），見 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）。想找更多 STEP 風格的積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。