詳細解答

STEP II 2009，第 6 題

純數學 • 無窮級數的界限

STEP II 2009，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q6

關鍵思路

我們無法準確求出 $\sum 1/F_i$ 的和，但可以把它夾在兩個界之間。遞推關係（recurrence）給出兩個簡單的比較：每個斐波那契數（Fibonacci number）都小於前一項的兩倍，又大於前兩項那一個的兩倍。第一個比較用一個等比級數（geometric series）從下方界定級數的尾部（tail）。第二個比較則把尾部與它自身平移後的版本聯繫起來，從而由上方界定它。在使用任何一個界之前先準確地加起若干項，就可以把估計收緊到我們想要的程度。

解答

把相鄰兩項逐對相加，得

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

所有 F_n 均為正數，而且當 $n \geq 2$ 時 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$，所以數列由 F_2 起嚴格遞增（strictly increasing）。

級數收斂。 當 $i \geq 4$ 時，$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$，因為當 $i - 2 \geq 2$ 時 $F_{i-1} > F_{i-2}$。由於 $F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$ 和 $F_2 = 1 \geq 2^0$，而 $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$，以每次兩步的歸納法（induction）可得對每個 i 都有 $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$。所以 $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$，於是與公比為 $1/\sqrt{2} < 1$ 的等比級數比較，可知 S 收斂（converges）。這樣我們就可以放心地對下面的和式進行運算。我們還會反覆用到一個事實：若對每個 i 都有 $a_i \leq b_i$，並且至少有一個 i 使 $a_i < b_i$，則對收斂級數而言 $\sum a_i < \sum b_i$。

第 (i) 部分

下界。 當 $i \geq 4$ 時，$F_{i-2} < F_{i-1}$，所以

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \geq 4),$$

這就是第一個結果。(當 $i = 3$ 時等號成立，即 $F_3 = 2F_2$，所以這個不等式要由 $i = 4$ 開始。)

反覆應用這個結果，當 $i \geq 4$ 時，

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

對 $i \geq 4$ 求和，

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

所以

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

上界。 現在使用另一個比較：由上面的 $F_i > 2F_{i-2}$，當 $i \geq 4$ 時 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$。我們把它應用於由 $i = 5$ 起的每一項，並設 $j = i - 2$：

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

左方是 S 減去它的首四項，即 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$。因此

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

? **想一想** 為甚麼上界的比較要由 $i = 5$ 開始，而不是由 $i = 4$ 開始？

由 $i = 4$ 開始也行得通，但只會得到 $S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$，即 $S < 4$，這並不足夠。在估計之前準確地加起的項愈多，因子 $\frac{1}{2}$ 令我們損失的就愈少。第 (ii) 部分正是靠這個想法來推動。

第 (ii) 部分

記部分和(partial sum)為 $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$，尾部為 $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$，於是 $S = S_{k-1} + T_k$。第 (i) 部分用了兩個一般的界，兩者對 $k \geq 3$ 都成立。

下界：與之前完全一樣，當 $i > k$ 時 $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$，所以

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{所以} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

上界：當 $i \geq k+2 \geq 5$ 時 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$，由此得 $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$，而 $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$，所以

$$T_k < 2\Big(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\Big), \qquad \text{所以} \qquad S < S_{k-1} + 2\Big(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\Big).$$

取 $k = 3$ 時，這兩個界就是第 (i) 部分的 3 和 $3\frac{2}{3}$。現在在兩者中都取 $k = 5$。

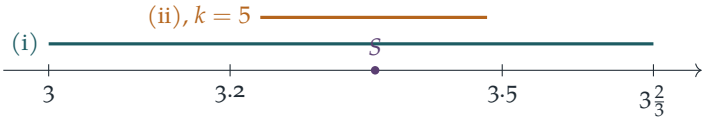
對於下界，$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$，所以

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

對於上界，$S_4 = \frac{17}{6}$，而 $F_5 = 5$，$F_6 = 8$，所以

$$S < \frac{17}{6} + 2\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

合起來便得 $3.2 < S < 3.5$，正如所求。（$k = 4$ 並不足夠：它只給出 $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$，約為 $3.17 < S < 3.57$。）



驗算

- 以數值方法把首 200 項加起來，得 $S \approx 3.35989$。這個值落在兩個區間之內，而且 $k = 3, \ldots, 6$ 的界全都把它夾在中間：$3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$。
- 用實際數值檢驗這些比較：$F_7 = 13 < 2 \times 8$，而 $13 > 2 \times 5$。

常見錯誤

- 在 $i = 3$ 時使用 $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$，但該處其實是等式。這會破壞不等式的嚴格性，或者得出錯誤的等比級數和。
- 未先確定級數收斂，就把 S 當作一個數來運算（「$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$」）。
- 因為由 $i = 4$ 開始的比較只給出 $S < 4$，就放棄求上界。應在估計之前先準確地加起更多的項。

STEP 之外

這個值是 $S \approx 3.3598856\ldots$，稱為斐波那契倒數常數（reciprocal Fibonacci constant）。現已知道它是無理數（irrational；這是 André-Jeannin 在 1989 年的結果），但至今未有已知的閉合形式（closed form）。這裏的比較其實是喬裝了的比值審斂法（ratio test）。F_{i+1}/F_i 趨向黃金比（golden ratio）$\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，所以尾部的表現就像一個公比為 $1/\varphi \approx 0.618$ 的等比級數，介乎我們那兩個粗略的公比 $\frac{1}{2}$ 與 $1/\sqrt{2}$ 之間。這類比較審斂法（comparison test）和尾部估計，是大學第一門分析（analysis）課程的核心內容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是正式認識這些內容的絕佳起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。