詳細解答

STEP II 2009，第 5 題

純數學 • 嵌套平方根

> **STEP II 2009，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q5

關鍵思路

開首的展開式其實就是整道題的化身：它告訴我們 $x+2\sqrt{x-1}$ 是一個完全平方（perfect square），而用同樣的手法可知 $x-2\sqrt{x-1}$ 也是。只要把嵌套根式（nested roots）拆開，每個被積函數（integrand）都會化簡成初等的式子。唯一要留神的是 $\sqrt{a^2}=|a|$，而不是 a，所以我們必須留意正負號，而這正是第 (ii) 部分有趣之處。

解答

展開式

當 $x \geq 1$ 時，

$$(\sqrt{x-1}+1)^2 = (x-1)+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1}.$$

同理，$(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}$。取非負平方根，並記住 $\sqrt{a^2}=|a|$，

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}+1, \qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-1|.$$

第一式不需要絕對值（modulus），因為 $\sqrt{x-1}+1>0$。第二式則需要：$\sqrt{x-1}-1$ 在 $1 \leq x < 2$ 時為負，在 $x \geq 2$ 時為非負。

第 (i) 部分

在 $[5,10]$ 上，我們有 $\sqrt{x-1} \geq 2 > 1$，所以 $|\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1$。因此分子是

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1) = 2\sqrt{x-1},$$

而被積函數就只是 2。故此

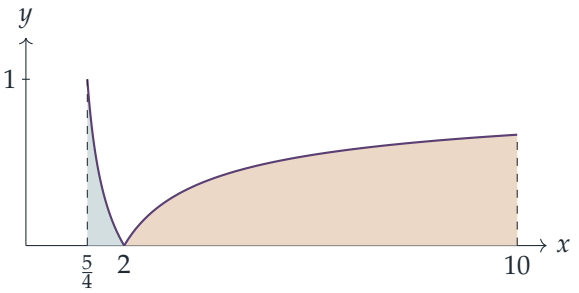
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

第 (ii) 部分

由展開式可得

$$y = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

所以 $y \geq 0$ 恆成立，而曲線在 $x=2$ 處與 x-軸相切，該處 $\sqrt{x-1}=1$。



? **想一想** 為甚麼我們不能直接去掉平方根，在整個範圍上對 $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 積分？

因為 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ 永不為負，但 $\sqrt{x-1}-1$ 在 $x<2$ 時為負。忽略絕對值的話，就會把 $[\frac{5}{4},2]$ 上的那一塊當作負面積計算。所以我們在 $x=2$ 處把積分分開。

在 $[\frac{5}{4},2]$ 上，$\sqrt{x-1}\leq 1$，所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-1$，而

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-(1-\tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{4}.$$

在 $[2,10]$ 上，$\sqrt{x-1}\geq 1$，所以 $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，而

$$\int_2^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_2^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

因此總面積是 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$。

第 (iii) 部分

分子中第二個根式的形狀有所不同，但只要以 $x+1$ 取代 $x-1$，同樣的手法仍然奏效：

$$(\sqrt{x+1}-1)^2 = (x+1)-2\sqrt{x+1}+1 = x-2\sqrt{x+1}+2.$$

當 $x \geq \frac{5}{4}$ 時，我們有 $\sqrt{x+1} > 1$，所以 $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1}-1$，不需要絕對值。寫成 $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$（由於當 $x > 1$ 時兩個因子皆為正，此式成立），被積函數便變成

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

兩個 ± 1 項互相抵消，這正是分子看來有點古怪的用意所在。故此

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\Big(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\Big)\mathrm{d}x &= \Big[2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}\Big]_{5/4}^{10} \\ &= (2\sqrt{11}+6)-(3+1) \\ &= 2\sqrt{11}+2,\end{aligned}$$

其中在下限處用到 $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$ 和 $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$。

驗算

- 在 $x = 5$ 處：$\sqrt{5+4} = 3$ 而 $\sqrt{5-4} = 1$，所以 (i) 的被積函數是 $(3+1)/2 = 2$，與所說相符。
- 在 (ii) 中，曲線在 $x = \frac{5}{4}$ 處的高度是 $|1-2| = 1$，在 $x = 10$ 處的高度是 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，與草圖吻合；第一塊是面積為 $\frac{1}{4}$ 的狹長小片，這是合理的。
- 對原來的被積函數使用辛普森法則（Simpson's rule），得出 10.000、4.250 和 8.6332，與 10、$\frac{17}{4}$ 和 $2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$ 一致。

常見錯誤

- 對所有 x 都寫 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1$。在 (ii) 中這會得出 $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$，而不是 $\frac{17}{4}$。
- 在 (iii) 中，沒有察覺 $x - 2\sqrt{x+1} + 2$ 也是完全平方，反而嘗試用代換法（substitution）。

STEP 之外

恆等式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是分析學（analysis）中一個重大主題的小例子：以公式定義的函數可以暗藏尖角和正負號的轉變，在積分之前，你必須先看清楚式子在哪裏變號。把 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ 這類根式解除嵌套（denesting），背後也有出奇地深刻的代數理論，與

域擴張（field extensions）有關。在分析學方面，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。