詳細解答

STEP II 2009，第 4 題

純數學 • 多項式的整除性

STEP II 2009，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q4

關鍵思路

處理「可被 $(x-1)^5$ 整除（divisible）」這個條件，最好的方法是把它直接寫出來：對某個多項式（polynomial）q，有 $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$。求導（differentiate）後可見，$\mathrm{p}(x) - 1$ 的重因式（repeated factor）會保留在 $\mathrm{p}'(x)$ 之中，只是冪次低一次。在最後一部分，這幾乎完全確定了 p'，因此我們只需對 p' 積分（integrate）便可求出 p，而不必與十個未知係數（coefficient）苦苦糾纏。

解答

由於 $\mathrm{p}(x) - 1$ 可被 $(x-1)^5$ 整除，而且次數（degree）為 9，我們可以寫成

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

其中 q 是一個 4 次多項式。

第 (i) 部分

代入 $x = 1$，第二項便會消失，所以

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

第 (ii) 部分

利用乘積法則（product rule）求導，

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x) \\ &= (x-1)^4(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)). \end{aligned}$$

括號內是一個多項式，所以 $\mathrm{p}'(x)$ 可被 $(x-1)^4$ 整除，正如題目所求。

第 (iii) 部分

把 $x-1$ 換成 $x+1$，完全相同的論證依然適用：寫成 $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$，便得 $\mathrm{p}(-1) = -1$，並且可知 $\mathrm{p}'(x)$ 可被 $(x+1)^4$ 整除。

因此 $\mathrm{p}'(x)$ 同時可被 $(x-1)^4$ 和 $(x+1)^4$ 整除。

> ? **想一想** 為甚麼由此可知 $\mathrm{p}'(x)$ 可被兩者之積 $(x-1)^4(x+1)^4$ 整除？

設 $\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$。$(x+1)^4$ 的每一個根(root)都是 -1，而它並不是 $(x-1)^4$ 的根，所以因式 $(x+1)^4$ 必定整除 $\mathrm{s}(x)$。(換句話說，一次因式(linear factor) $x+1$ 在 p' 中出現了四次，而這四個因式沒有一個可以被 $(x-1)^4$ 用掉。)因此 $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$ 整除 $\mathrm{p}'(x)$。

現在 p' 的次數是 8，與 $(x^2-1)^4$ 的次數相同，所以商（quotient）是一個非零常數：

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

積分後得

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

留意 F 是奇函數（odd function），所以 $\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$。由已知的兩個函數值可得

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

兩式相加，得 $c = 0$；兩式相減，得 $k\mathrm{F}(1) = 1$。以 315 為公分母，

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{所以} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

因此

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

我們還應該驗證這個多項式確實符合要求，因為到目前為止，我們只證明了任何符合條件的 p 都必定是這個形式。它的次數是 9。此外，$\mathrm{p}(1) - 1 = 0$，而且 $\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$，所以 $\mathrm{p}(x) - 1$ 的首四階導數（derivative）在 $x = 1$ 處全部為零；因此 $x = 1$

是 $\mathrm{p}(x)-1$ 的根，其重數（multiplicity）至少為 5，即 $(x-1)^5$ 整除 $\mathrm{p}(x)-1$。由於 p 是奇函數，$\mathrm{p}(x)+1=-(\mathrm{p}(-x)-1)$，而後者可被 $(-x-1)^5=-(x+1)^5$ 整除。所以兩個條件都成立，而這個 p 就是唯一的答案。

驗算

- 係數 $35,-180,378,-420,315$ 之和為 128，由此確認 $\mathrm{p}(1)=1$。
- 以準確的分數運算，把 $\mathrm{p}(x)-1$ 反覆除以 $x-1$，餘數（remainder）恰好有五次為零；把 $\mathrm{p}(x)+1$ 反覆除以 $x+1$，結果亦然。
- p 是奇函數，這是必然的：若 p 符合條件，則 $-\mathrm{p}(-x)$ 亦符合條件，而答案是唯一的。

常見錯誤

- 試圖由十條聯立方程（simultaneous equations）直接求出 p 的全部十個係數。這在原則上可行，但對 p' 積分要快得多。
- 忘記積分常數（constant of integration），或者沒有同時利用 $\mathrm{p}(1)=1$ 和 $\mathrm{p}(-1)=-1$ 來確定積分常數和 k。

STEP 之外

第 (ii) 部分背後的事實是：a 是 f 的 m 重根，當且僅當 $\mathrm{f}(a)=\mathrm{f}'(a)=\cdots=\mathrm{f}^{(m-1)}(a)=0$。像這樣在若干點上指定函數值和導數值，稱為埃爾米特插值（*Hermite interpolation*）；而這裏求得的多項式是一條「smoothstep」曲線，由 -1 上升至 1，並且在兩端盡可能平坦，常用於電腦圖像（computer graphics）。「互質（coprime）的因式各自整除，則其乘積亦整除」這個論證屬於環論（ring theory）：域（field）上的多項式具有唯一分解（unique factorisation）性質，與整數一樣。想進一步了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。