詳細解答

STEP II 2009，第 3 題

純數學 • 三角恆等式與根式

> **STEP II 2009，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q3

關鍵思路

恆等式（identity）$(*)$ 把你已知的角 x 的正切（tangent），化為角 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ 的正切，而後者的大小約為前者的一半。因此它就像一部半角（half-angle）機器。功夫在於選取一個起始角 x，使它恰好落在你想要的角上。之後的工作就是細心地進行根式（surd）運算：有理化（rationalising）、展開和平方。

解答

證明 $(*)$

設 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，則 $x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$。於是

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

因此，只要兩邊均有定義（即 $\cos x \neq 0$），便有

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

約去 $\sin\theta$ 是容許的，因為 $\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$ 必然使 $\sin\theta \neq 0$。這就證明了 $(*)$。

第 (i) 部分

我們要 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$，由此得 $x = \frac{1}{4}\pi$。由於 $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$ 及 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

至於第二個結果，留意 $\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$，而我們知道 $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$。由複角公式（addition formula）得

$$\tan\tfrac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

與其把一個有三項的分母有理化，不如直接證明以下等式，這樣更快：

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

把 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$ 依次乘以第一個括號內的每一項，並利用 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$：

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

現在把同類項合併。常數項得 $2+3-6=-1$。$\sqrt{2}$ 項得 $1-3+3=1$。$\sqrt{3}$ 項得 $2-2+1=1$。$\sqrt{6}$ 項得 $-2+1+1=0$。總和為 $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$。分母 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$ 不等於零，所以我們可以除以它，於是

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

想一想 最後一部分應把哪個 x 值代入 $(*)$？

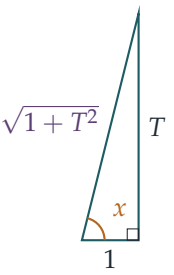
我們需要 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$，所以 $\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$，即 $x = \frac{11}{24}\pi$。這正好是我們在 (i) 和 (ii) 中求得其正切的那個角。

第 (iii) 部分

設 $T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$。在 $(*)$ 中取 $x = \frac{11}{24}\pi$，得

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sec\tfrac{11}{24}\pi - T.$$

至於正割（secant），我們有 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$。由於 $0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$，餘弦為正，所以取正根，$\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$。下面的三角形顯示的是同一件事。



把 T 平方，四項各自的平方之和為 $4+2+3+6=15$。交叉項之和為

$$2(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}) = 2(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = 10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

所以 $1+T^2 = 16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$，因此

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}} - 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6},$$

正如所求。

驗算

- $\sqrt{2}-1 \approx 0.41421$，與 $\tan 22.5^\circ$ 相符。
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \approx 7.59575$，與 $\tan 82.5^\circ$ 相符。(i) 中的分數也給出相同的值。
- 最後的表達式為 $\sqrt{57.45\ldots} - 7.59575 \approx 0.0655435$，與 $\tan 3.75^\circ \approx 0.0655435$ 相符。
- 快速檢驗 $(*)$：當 $x=0$ 時兩邊均等於 1，而當 $x=\frac{1}{3}\pi$ 時兩邊均等於 $2-\sqrt{3} = \tan\frac{1}{12}\pi$。

常見錯誤

- 解 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$ 時出錯，誤用 $x = \frac{11}{48}\pi$。那個 $\frac{1}{2}$ 必須消去。
- 把四項的根式平方時遺漏交叉項。交叉項共有六個，每個都要乘以二。
- 直接取 $\sec x = \sqrt{1+\tan^2 x}$，卻沒有說明為何正根才是正確的。

STEP 之外

像 $\tan\frac{\pi}{48}$ 這類精確值，連同當中層層相套的平方根，就是這樣靠反覆把角減半而逐步構造出來的。這正是一個古典問題在代數上的一面：哪些正多邊形可以用尺規作圖（ruler and compass construction）作出？高斯（Gauss）證明了答案取決於 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 能否只用平方

根來表示，而伽羅華理論（Galois theory）則解釋了箇中原因。域（field）和域擴張（field extension）是講述這個故事的語言，若想初步認識，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。