詳細解答

STEP II 2009，第 2 題

純數學 • 曲線描繪與近似

STEP II 2009，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q2

關鍵思路

由於 $a > 1$，函數 a^u 對 u 嚴格遞增（strictly increasing），所以 y 恰好在 $\sin(\pi e^x)$ 最大之處取得最大值，在它最小之處取得最小值。因此，這條曲線的一切性質都來自內層函數 πe^x：它穩定地遞增，依次經過正弦函數的波峯和波谷，而且隨着 x 增大，這些點會愈來愈密集。至於面積，各梯形（trapezium）兩端的高度相同，於是整個和式便化簡為單單一個對數之差。

解答

第 (i) 部分

取對數（logarithm），得 $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$。以隱函數求導（implicit differentiation），

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x) \, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

這裏 $\ln a > 0$（因為 $a > 1$），$e^x > 0$ 而且 $a^{\sin(\pi e^x)} > 0$，所以導數恰好在 $\cos(\pi e^x) = 0$ 時為零，即 πe^x 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍之時。由於 $\pi e^x > 0$，只有正的奇數倍才有可能：

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

在這些點上 $\sin(\pi e^x) = \sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$，所以 $y = a^{(-1)^n}$。駐點（stationary point）為

$$\left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\, a\right) \ (n \text{ 為偶數}), \qquad \left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\, \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ 為奇數}).$$

第一組是極大點，第二組是極小點。由於 a^u 遞增，對任何 x 都有 $y \le a^1 = a$ 和 $y \ge a^{-1}$，所以 $y = a$ 的點是全局極大點（global maximum），$y = 1/a$ 的點是全局極小

點（global minimum）。具體來說，極大點位於 $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$，極小點位於 $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$

第 (ii) 部分

當 x 很小時，$e^x \approx 1 + x$，所以

$$\sin(\pi e^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

這裏先用了 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$，再用 $\sin t \approx t$，其中 $t = \pi x$ 很小。因此

$$y \approx a^{-\pi x} = e^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

最後一步再次用到 $e^t \approx 1 + t$，這次的小量是 $t = -\pi x \ln a$。這就是所求的近似式：曲線在 $x = 0$ 處穿過直線 $y = 1$，斜率（gradient）為 $-\pi \ln a$。

> **想一想** 為甚麼不能把 $\sin t \approx t$ 直接代入 $\sin(\pi e^x)$？

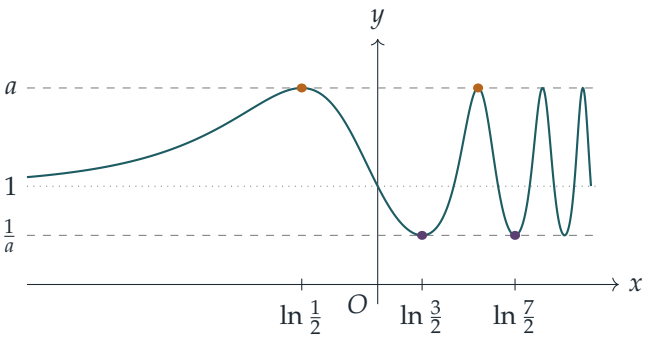
因為當 x 很小時，πe^x 接近的是 π，而不是 0。我們必須先用 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$，把小量 πx 移到正弦函數的自變量之中。

第 (iii) 部分

草圖上應標示的一些特徵：

- 當 $x \to -\infty$ 時，$e^x \to 0$，所以 $\sin(\pi e^x) \to 0$，而 $y \to 1$，並且是從上方趨近（當 $x < \ln\frac{1}{2}$ 時，我們有 $0 < \pi e^x < \frac{\pi}{2}$，所以正弦值為正，$y > 1$）。直線 $y = 1$ 是曲線在左方的漸近線（asymptote）。
- 曲線上升至位於 $x = \ln\frac{1}{2}$ 的第一個極大值 a，然後永遠在 a 與 $1/a$ 之間振盪，並且始終在 x 軸上方。
- 每當 e^x 是正整數時，曲線便穿過 $y = 1$，即在 $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$ 處；而由第 (ii) 部分可知，在 $x = 0$ 處的斜率為 $-\pi \ln a$。
- 相鄰駐點之間的距離為 $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$，所以隨着 x 增大，振盪愈來愈快。

下面的草圖顯示 $a = 2$ 的情況。



第 (iv) 部分

從左邊數起：第 k 個極大點對應 $n = 2(k-1)$，所以它位於 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$。第 $(k+1)$ 個極大點位於 $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$，而兩者之間唯一的極小點位於 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$。記

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

用直線把 (x_1, a) 連到 $(x_2, \frac{1}{a})$，再把 $(x_2, \frac{1}{a})$ 連到 (x_3, a)，則直線以下至 x 軸的區域分成兩個梯形，每個梯形的兩條平行邊長度都是 a 和 $\frac{1}{a}$。所以面積的近似值為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

最後，$\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$，所以面積近似於

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

正如題目所求。留意極小點的位置 x_2 完全消去了：只有兩個極大點起作用。

驗算

- 以數值方法求導，可確認在 $n = 0, \ldots, 7$ 時 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 於 $x = \ln(n + \frac{1}{2})$ 成立，而在 $[-6, \ln 8]$ 上再無其他零點；同時亦確認在 $x = 0$ 處的斜率為 $-\pi \ln a$（取 $a = 2$ 時，兩者皆為 -2.1776）。
- 取 $a = 2$、$k = 1$ 時，公式給出 $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$，而用辛普森法則（Simpson's rule）求得的真實面積是 1.954：兩者相當接近，正是近似值應有的表現。梯形的估算略為偏高：曲線在極小點附近低於弦線的幅度，大於它在極大點附近高出弦線的幅度。
- 當 $k \to \infty$ 時，面積趨向 0，與振盪愈來愈窄的現象吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把 $\frac{\pi}{2}$ 的負奇數倍也算進去：πe^x 永遠是正數。
- 從 $k = 0$ 而不是 $k = 1$ 開始為極大點編號，結果答案會變成 $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$。
- 在第 (ii) 部分停在 $a^{-\pi x}$，沒有做最後一步線性化 $e^t \approx 1 + t$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其實是把較簡單的展開式複合起來，從而得出一階泰勒展開（Taylor expansion），這正是大學本科生處理複合函數展開的方法。當 k 很大時，一次振盪之下的真實面積大約是 $(x_3 - x_1)$ 乘以 $a^{\sin\theta}$ 在一個週期上的平均值，這個積分會引出修正貝塞爾函數（modified Bessel function）$I_0(\ln a)$；把它與 $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 比較，是一道很好的練習，可藉此明白為甚麼梯形法則（trapezium rule）對這類曲線會高估。若想看對近似與泰勒定理（Taylor's theorem）的嚴謹論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。