詳細解答

STEP II 2009，第 13 題

概率與統計 • 二項分佈的期望成本

> **STEP II 2009，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q13

關鍵思路

發生故障的引擎數目服從二項分佈（binomial distribution），所以維修費用是一個二項隨機變量（random variable）的簡單函數，而其期望值（expectation）只是一個簡短的和。要得出簡潔的形式 $(*)$，竅門是不要把「全部更換」的情況逐一相加：改用補集（complement），然後利用因式分解 $1-q^n = p(1+q+\cdots+q^{n-1})$ 抽出因子 p。

解答

我們按照題目的原意，假設各引擎是否發生故障互相獨立（independent），每個引擎發生故障的概率均為 p，並記 $q = 1-p$。所有費用一律以 K 為單位計算，直到最後為止。

Andover 型

設 X 為 Andover 型引擎中發生故障的數目，則 $X \sim \mathrm{B}(4, p)$；又設 C_A 為維修費用。於是

$$C_A = \begin{cases} 0 & X = 0, \\ K & X = 1, \\ 4K & X \geq 2. \end{cases}$$

現在 $\mathrm{P}(X=0) = q^4$ 及 $\mathrm{P}(X=1) = 4pq^3$，所以 $\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - q^4 - 4pq^3$。因此

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(C_A) &= K \cdot 4pq^3 + 4K(1 - q^4 - 4pq^3) \\ &= 4K(1-q^4) - 12Kpq^3. \end{aligned}$$

由於 $1-q^4=(1-q)(1+q+q^2+q^3)=p(1+q+q^2+q^3)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A)&=4Kp(1+q+q^2+q^3)-4Kp\cdot 3q^3\\&=4Kp(1+q+q^2-2q^3),\end{aligned}$$

這正是所要求的 $(*)$。

Basingstoke 型

設 $Y\sim \mathrm{B}(6,p)$ 為 Basingstoke 型引擎中發生故障的數目，C_B 為維修費用。則當 $Y\le 2$ 時 $C_B=YK$，而當 $Y\ge 3$ 時 $C_B=6K$。由

$$\mathrm{P}(Y=0)=q^6,\qquad \mathrm{P}(Y=1)=6pq^5,\qquad \mathrm{P}(Y=2)=15p^2q^4,$$

可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_B)&=K\cdot 6pq^5+2K\cdot 15p^2q^4+6K(1-q^6-6pq^5-15p^2q^4)\\&=6K(1-q^6)-30Kpq^5-60Kp^2q^4.\end{aligned}$$

利用 $1-q^6=p(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)$ 並抽出 $6Kp$，

$$\mathrm{E}(C_B)=6Kp(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5-5q^5-10pq^4).$$

想一想 括號內仍然有一個 p。怎樣才能把它化成「與 $(*)$ 相似的形式」？

形式 $(*)$ 是因子 p 乘以一個只含 q 的多項式（polynomial），所以我們把餘下的 p 換成 $1-q$：$10pq^4=10q^4-10q^5$。合併各項後，

$$\boxed{\mathrm{E}(C_B)=6Kp(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5).}$$

Andover 型的費用何時是 Basingstoke 型費用的 $\frac{2}{3}$？

我們需要 $\mathrm{E}(C_A)=\frac{2}{3}\mathrm{E}(C_B)$，即

$$4Kp(1+q+q^2-2q^3)=4Kp(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5).$$

兩邊都有因子 $4Kp$，而 $K>0$，所以此式成立當且僅當 $p=0$ 或

$$-2q^3=q^3-9q^4+6q^5\iff 3q^3-9q^4+6q^5=0\iff 3q^3(1-q)(1-2q)=0.$$

所以 $q=0$、$q=1$ 或 $q=\frac{1}{2}$，即 $p=1$、$p=0$ 或 $p=\frac{1}{2}$。三個值都在 $[0,1]$ 之內，故所求的值為

$$p=0,\qquad p=\tfrac{1}{2},\qquad p=1.$$

$p=0$ 這個值最乏味：引擎永不發生故障，兩個期望費用都是零。當 $p=1$ 時，每個引擎都發生故障，費用分別為 $4K$ 和 $6K$。真正有趣的值是 $p=\frac{1}{2}$。

驗算

當 $p = \frac{1}{2}$ 時，$(*)$ 給出 $\mathrm{E}(C_A) = 2K(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 3K$，而 Basingstoke 型的公式給出 $\mathrm{E}(C_B) = 3K(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{9}{16} + \frac{6}{32}) = \frac{9}{2}K$，果然 $3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}$。我們亦取了 200 個有理數 p 值，把兩條公式與直接按二項分佈逐一列舉所得的結果作精確比對，並以模擬方式驗證：當 $p = 0.3$ 時，2×10^5 次模擬發射所得的平均費用為 $1.811K$ 和 $2.483K$，而公式所得的則是 $1.805K$ 和 $2.485K$。

常見錯誤

- 當有兩個或以上 Andover 型引擎發生故障時，把費用算作 XK 而不是 $4K$：一旦超過門檻，所有引擎都要更換，包括完好的那些。
- 在 Basingstoke 型的括號內留下一個 p，以致答案不符合題目要求的形式。
- 在最後的方程中除以 p 而漏掉 $p = 0$，或除以 q^3 而漏掉 $p = 1$。

STEP 之外

這是在門檻策略（threshold policy）下計算期望費用的一個小例子，而這類計算正是可靠性理論（reliability theory）和運籌學（operational research）的家常便飯：管理者要選定門檻，在更換完好零件的費用與更頻密維修的費用之間取得平衡。我們所用的尾和（tail sum）處理手法，即把 $\mathrm{P}(X \geq k)$ 寫成一減去首幾項，與得出非負整數值變量的公式 $\mathrm{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathrm{P}(X \geq k)$ 背後的想法如出一轍。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對這些想法有嚴謹細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。