詳細解答

STEP II 2009，第 11 題

力學 • 功率與阻力

> **STEP II 2009，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q11

關鍵思路

把整列火車視為一個質量為 $(n+1)M$、總阻力為 $(n+1)R$ 的物體。在功率（power）為 P 時，速率為 v 時的驅動力是 P/v，所以由牛頓第二定律（Newton's second law）可立即得出加速度。要求出達到某個速率所需的時間，可把加速度寫成 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，分離變數（separate the variables）後積分。最後一部分是能量收支：引擎所作的功轉化為動能（kinetic energy），以及克服阻力所作的功。

解答

把引擎和各節車卡看成一起運動的質點（particle）（車鉤保持拉緊且為剛性），於是整列火車是單一物體。設

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

分別為它的總質量和總阻力。

加速度

功率等於力乘以速率，所以在最大功率下、速率為 v 時，引擎的牽引力（tractive force）為 P/v。沿路軌方向分解，對整列火車應用牛頓第二定律，得

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

達到速率 V 所需的時間

設 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，然後分離變數：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P - kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

要計算這個積分，可把分子用分母表示，即 $v = \frac{1}{k}(P - (P - kv))$，從而把分式拆開：

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

因此

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1 - \frac{kV}{P}\Big).$$

由於 $m/k = M/R$ 及 $m/k^2 = M/((n+1)R^2)$，

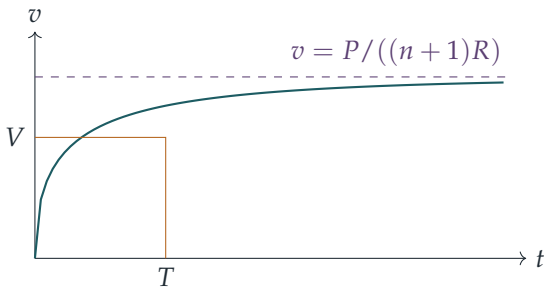
$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1 - \frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

想一想 為甚麼 P 必須大於 $(n+1)RV$，而這不僅僅是令對數有意義的條件？

從物理上看，當 $v < P/k$ 時，加速度 $(P-kv)/(mv)$ 為正，而在 $v = P/k$ 時加速度會變為零。火車由 $v = 0 < P/k$ 出發並加速，但隨着 v 趨近 P/k，加速度逐漸消失。公式顯示火車永遠到不了這個速率：當 $V \to P/k$（由下方趨近）時，$\ln(1 - kV/P) \to -\infty$，所以 $T \to \infty$。因此 P/k 是終端速率（terminal speed），火車會不斷趨近它，卻無法在有限時間內達到，而等於或高於它的速率則永遠達不到。所以，只有當 $V < P/k$ 時才能達到速率 V，即

$$P > (n+1)RV,$$

這正是所需的結果。（等價地說，$P \le kV$ 意味着引擎即使全力輸出，也無法在速率 V 時抵消阻力。）



（此草圖只屬定性描繪：起初驅動力 P/v 很大，速率急升，其後逐漸趨平，接近終端速率。）

第 (i) 部分

設 $x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$，它是一個很小的量。於是 $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$，再利用 $V = Px/k$，得

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}\,x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}\,x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

一階項剛好完全抵消，這就是我們需要 x^2 項的原因。因此

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

詮釋。PT 是引擎在時間 T 內所作的功，而 $\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ 是火車所獲得的動能。所以當 $(n+1)RV$ 遠小於 P 時（阻力乘以速率遠小於引擎的功率），引擎所作的功幾乎全部轉化為動能，只有極少耗於阻力：火車的表現就如同沒有阻力一樣。

第 (ii) 部分

在時間 T 內，引擎以恆定功率 P 運作，所作的功為 PT。在距離 X 內，恆定的總阻力 $(n+1)R$ 所作的功為 $-(n+1)RX$；換言之，火車克服阻力作了 $(n+1)RX$ 的功。火車由靜止出發，最後速率為 V，而路軌是水平的，所以勢能（potential energy）沒有改變。根據功能原理（work–energy principle），

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

移項整理，得

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

這正是所需的結果。這與第 (i) 部分吻合：若阻力可以忽略，$(n+1)RX$ 一項便會消失，剩下 $PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$。

驗算

- 取 $n = 3$、$M = 2$、$R = 1$、$P = 40$、$V = 6$（於是 $(n+1)RV = 24 < 40$）。公式給出 $T \approx 6.3258$，繼而 $X \approx 27.258$。以數值方法把運動方程逐步向前推算，所得數值準確至四位有效數字都相同。
- 量綱（dimensions）：MV/R 是（質量）（速率）/（力），即時間，MP/R^2 亦然；對數則是無量綱的。
- 當 $V \to P/\big((n+1)R\big)$ 時，T 無止境地增大（以上述數值計算，在終端速率的 90%、99%、99.9% 時，$T \approx 28$、72、118），這印證了該條件。
- 當 x 很小時，比值 $PT\big/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ 約為 $1 + \frac{2}{3}x$，趨向 1，與第 (i) 部分的預測一致。

常見錯誤

- 只用引擎本身的質量和阻力，而不是整列火車的：引擎要拉動全部 $n+1$ 節車輛。
- 題目要求的是時間，卻寫成 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，或使用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。這條路得出的是距離，而不是時間。
- 在第 (i) 部分只把對數展開至一階：x 項互相抵消，結果得到 $T \approx 0$，答案就此丟失。

STEP 之外

方程 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$ 是一階非線性常微分方程（ODE），而且恰好是可分離變數的；終端速率 P/k 則是一個穩定平衡點（stable equilibrium），解會不斷趨近它，卻無法在有限時間內到達。這種現象在光滑常微分方程的平衡點附近十分典型，由解的唯一性（uniqueness of solutions）即可看出。第 (ii) 部分就是功能定理（work–energy theorem），它在大學力學中會成為貫穿全局的核心原理。想進一步了解，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門），至於常微分方程方面，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。