詳細解答

STEP II 2009，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

> **STEP II 2009，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q10

關鍵思路

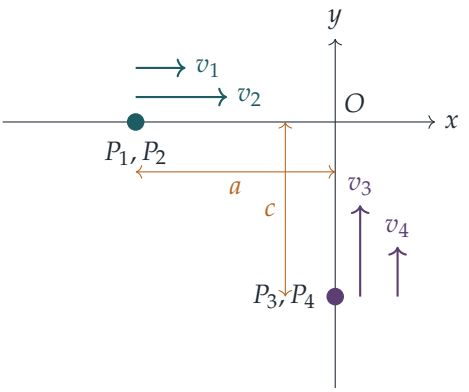
全題共有四次碰撞（collision），但只有頭兩次需要用到力學：它們決定了碰撞剛結束時的四個速率。其餘全是時間上的計算。兩個質點（particle）沿不同的軸運動而「在 O 碰撞」，其實就是在同一瞬間到達 O，所以其後每一次碰撞都給出一條形如「距離 / 速率 = 距離 / 速率」的方程。把其中一條時間方程除以另一條，未知的距離便會消去，剩下一個關於質量的條件。

解答

設定

我們把四件物體視為在光滑軸上運動的質點，所以在兩次碰撞之間，每個質點都以恆定速度運動。設 P_2 起初位於負 x 軸上與 O 相距 a 之處，P_3 起初位於負 y 軸上與 O 相距 c 之處。我們須證明 $a = c$。

取 $t = 0$ 為頭兩次碰撞（同時發生）的一刻。這兩次碰撞發生在 P_2 和 P_3 原本所在的位置，所以在 $t = 0$ 時，質點 P_1 和 P_2 與 O 的距離都是 a，而 P_3 和 P_4 與 O 的距離都是 c。



頭兩次碰撞

假設一個質量為 M、以速率 u 運動的質點正面撞向一個質量為 m 的靜止質點，恢復系數（coefficient of restitution）為 e，而碰撞後兩者沿原來運動方向的速度分別為 V 和 w。由動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）可得

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

所以

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

把這個結果應用於 P_1 撞向 P_2，以及 P_4 撞向 P_3，可知在 $t = 0$ 剛過後，各質點朝向 O 的速度為

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

顯然 $v_2, v_3 > 0$。由於 P_1 和 P_4 其後確實到達 O，它們必定仍在朝着它運動，所以同樣有 $v_1 > 0$ 和 $v_4 > 0$。

利用其後的碰撞

想一想 兩個質點分別在互相垂直的軸上，怎樣才能「碰撞」？

兩條軸唯一的公共點是 O。所以「P_2 和 P_3 在 O 碰撞」的意思不過是它們同時到達 O，P_1 和 P_4 亦然。由 $t = 0$ 至到達 O 為止，每個質點都以恆定速率運動（題目告訴我們，任何

一個質點所涉及的下一次碰撞都在 O 發生），所以到達時間就是距離除以速率：

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2 \text{ 與} P_3 \text{ 相遇於} O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1 \text{ 與} P_4 \text{ 相遇於} O). \tag{2}$$

把 (1) 除以 (2)，距離便會約去：

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

根據上面的公式，每個比之中的因子 u 和 $m_1 + m_2$（或 $m_3 + m_4$）都會約去，所以上式即是

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

兩邊同乘以 $m_1 m_4(1+e)$，得

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{所以} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

由於 $e > 0$，我們可以除以 e，於是 $m_1 m_3 = m_2 m_4$，即

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ 姑且如此記之。}$$

現在回到 v_2 和 v_3。把分子和分母分別同除以 m_2 和 m_3，得

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

所以 P_2 和 P_3 在頭兩次碰撞後以相等的速率離開，於是由 (1) 得 $a = c$。因此 P_2 和 P_3 起初與 O 等距，這正是所要證明的。

驗算

- 取 $m_1 = 2$、$m_2 = 1$、$m_3 = 3$、$m_4 = 6$（所以 $k = 2$）、$e = \frac{1}{2}$、$u = 1$ 及 $a = c = 1.7$。那麼 $v_2 = v_3 = 1$ 而 $v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$：P_2 和 P_3 在 $t = 1.7$ 時一同到達 O，而 P_1 和 P_4 在 $t = 3.4$ 時一同到達，正如題目所說是在較後的時間。逐步模擬的結果與此吻合。
- 留意 $v_2 - v_1 = eu > 0$，所以 P_1 確實在 P_2 之後才到達，與「一段時間之後」相符。
- 若 $e = 0$，這個論證便會失效，而這是理所當然的：此時 $v_1 = v_2$ 且 $v_3 = v_4$，所以 (2) 與 (1) 完全相同，任何滿足 $a/c = v_2/v_3$ 的 a 和 c 都可以。這正是題目堅持 $e > 0$ 的原因。

常見錯誤

- 從 P_1 的起點量度它的路程。在 $t = 0$ 之後，它是從 P_2 原本所在的位置出發，與 O 相距 a，這就是為甚麼同一個 a 會同時出現在 (1) 和 (2) 之中。

- 不加說明便除以 e。$e = 0$ 的情況確實有所不同。
- 試圖分析 P_2 與 P_3 在 O 的碰撞。我們完全不需要知道這次碰撞的結果，只需要知道它們同時到達那裏。

STEP 之外

質量條件 $m_1 m_3 = m_2 m_4$ 說明這兩次碰撞是彼此按比例縮放的翻版：正面碰撞後的速度只取決於質量比和 e，這讓我們初次窺見量綱分析（dimensional analysis）與相似性（similarity）。在大學裏，碰撞問題放在質心參考系（centre-of-mass frame）中處理最為簡潔，在那裏恢復系數只是把相對速度（relative velocity）按比例縮放。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種方式闡述動量與碰撞。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。