詳細解答

STEP II 2009，第 1 題

純數學 • 曲線的對稱性

> **STEP II 2009，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q1

關鍵思路

這一題幾乎不用計算：靠對稱性（symmetry）就能完成大部分工作。兩條曲線對直線 $y = x$ 和 $y = -x$ 作反射（reflection）後都保持不變，所以只要有了一個交點，其餘交點都可以由它反射得到。接着，由這四點的位置形狀便可推出長方形（rectangle）。至於面積，我們根本不必求出 α 和 β 本身：答案原來只需要它們的一個組合，而這個組合可以直接由 $\alpha^4 + \beta^4 = u$ 和 $\alpha\beta = v$ 得到。

解答

對稱軸

如果把曲線上任意一點對某條直線作反射，所得的點仍然在曲線上，我們就說該曲線對這條直線對稱。我們需要的四個反射是

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x), \quad (x, y) \mapsto (-y, -x),$$

它們分別是對 $x = 0$、$y = 0$、$y = x$ 和 $y = -x$ 的反射。

曲線 $x^4 + y^4 = u$。表達式 $x^4 + y^4$ 在這四個映射下都保持不變，因為四次方與正負號無關，而且表達式對 x 和 y 是對稱的。所以這條曲線有四條對稱軸（lines of symmetry）：

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

曲線 $xy = v$。把 x 和 y 互換，xy 保持不變；$(x, y) \mapsto (-y, -x)$ 也是如此，因為 $(-y)(-x) = xy$。只改變其中一個坐標的正負號，會把 xy 變成 $-xy$，而由於 $v > 0$，點 $(-x, y)$ 便落在 $xy = -v$ 上，而不在我們的曲線上。所以這條等軸雙曲線（rectangular

hyperbola）恰好有兩條對稱軸：

$$y = x, \qquad y = -x.$$

四個交點

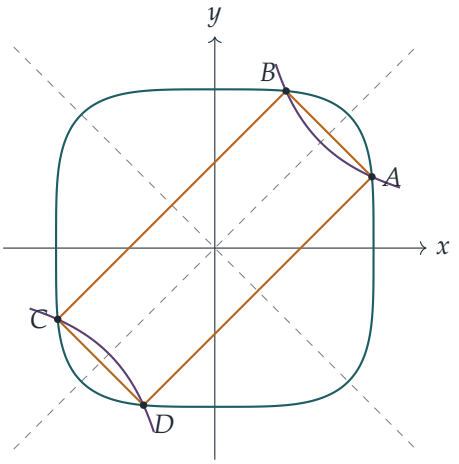
設 S 為對 $y = x$ 的反射，T 為對 $y = -x$ 的反射。兩者都把兩條曲線各自映射到自身，所以都把交點映射到交點。由 $A = (\alpha, \beta)$ 出發，我們得到

$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

因為 $\alpha > \beta > 0$，這四點互不相同。此外再沒有其他交點。把 $y = v/x$ 代入四次曲線（quartic）的方程，得 $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$，這是 x^4 的二次方程，最多有兩個正根，所以 x 最多有四個實數值。

要按逆時針方向為這些點命名，可以看它們的極角（polar angle）。由於 $0 < \beta < \alpha$，點 A 的極角 θ 滿足 $0 < \theta < 45°$。於是 (β, α) 的極角是 $90° - \theta$，$(-\alpha, -\beta)$ 的極角是 $180° + \theta$，而 $(-\beta, -\alpha)$ 的極角是 $270° - \theta$。這些角按此次序遞增，所以

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$



（圖中所示為 $u = 81$、$v = 4$ 的情況：四次曲線以藍綠色表示，雙曲線以紫紅色表示。）

$ABCD$ 是長方形

對角線是 AC 和 BD。AC 的中點是 $(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}) = (0, 0)$，同樣地，$BD$ 的中點也是 $(0, 0)$。所以兩條對角線互相平分，$ABCD$ 是平行四邊形（parallelogram）。它們的長度是

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

兩者相等。對角線相等的平行四邊形是長方形，所以 $ABCD$ 是長方形。

> **想一想** 為甚麼對角線相等的平行四邊形必定是長方形？

四個頂點與 O 的距離同為 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，所以它們都在以 O 為圓心的一個圓上，而 AC 和 BD 是這個圓的直徑。根據半圓上的圓周角（angle in a semicircle）定理，$ABCD$ 的每一隻角都是直角。如果想直接驗證，則有 $\overrightarrow{AB}=(\beta-\alpha,\,\alpha-\beta)$ 和 $\overrightarrow{BC}=(-\alpha-\beta,\,-\alpha-\beta)$，其純量積（scalar product）為

$$-(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)]=0.$$

面積

邊長是

$$AB=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}\,(\alpha-\beta),\qquad BC=\sqrt{2(\alpha+\beta)^2}=\sqrt{2}\,(\alpha+\beta),$$

這裏用了 $\alpha>\beta>0$ 來取正平方根。所以

$$\text{面積}=AB\cdot BC=2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=2(\alpha^2-\beta^2).$$

現在利用 A 同時在兩條曲線上這個事實，即 $\alpha^4+\beta^4=u$ 和 $\alpha\beta=v$。於是

$$(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2=u-2v^2.$$

由於 $\alpha^2-\beta^2>0$，我們取正根，得

$$\boxed{\text{長方形面積}ABCD=2\sqrt{u-2v^2}}$$

這也說明，題目假設有四個不同的交點，就必然有 $u>2v^2$。如果 $u=2v^2$，則 $\alpha=\beta$，兩條曲線只是相切。

當 $u=81$ 及 $v=4$ 時：$u-2v^2=81-32=49$，所以面積是 $2\times7=14$，與題目要求相符。

驗算

當 $u=81$、$v=4$ 時，以數值方法解 $x^8-81x^4+256=0$，得 $\alpha\approx2.9690$ 及 $\beta=4/\alpha\approx1.3472$。於是 $2(\alpha^2-\beta^2)\approx14.000$，而對四個頂點使用鞋帶公式（shoelace formula）也得到相同的面積。當 u 下降並趨向 $2v^2$ 時，每個象限內的兩點在 $y=x$ 上合而為一，長方形壓扁成一條線段，與面積 $2\sqrt{u-2v^2}\to0$ 吻合。

常見錯誤

- 把坐標軸當作 $xy = v$ 的對稱軸。對坐標軸作反射，會把第一象限的分支送到第二象限，而那裏 $xy < 0$。
- 把各點的次序標錯，例如取 $B = (-\alpha, -\beta)$。這樣 $ABCD$ 便會連成一個交叉四邊形。
- 試圖明確地解出 α 和 β。面積只需要 $\alpha^2 - \beta^2$，而它可以直接由 u 和 v 得到。

STEP 之外

保持 $x^4 + y^4 = u$ 不變的四個反射和各個旋轉，構成正方形的對稱羣（symmetry group），即階為 8 的二面體羣（dihedral group）。雙曲線只保留了其中一個階為 4 的子羣（subgroup）（兩個反射、半周旋轉和恆等變換）。兩條曲線共有的對稱變換會把交點互相置換，而像這樣藉着羣的作用來尋找對象，正是大學一年級羣論（group theory）的一個主題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是認識這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。