詳細解答

STEP I 2009，第 9 題

力學 • 相撞的拋體

STEP I 2009，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

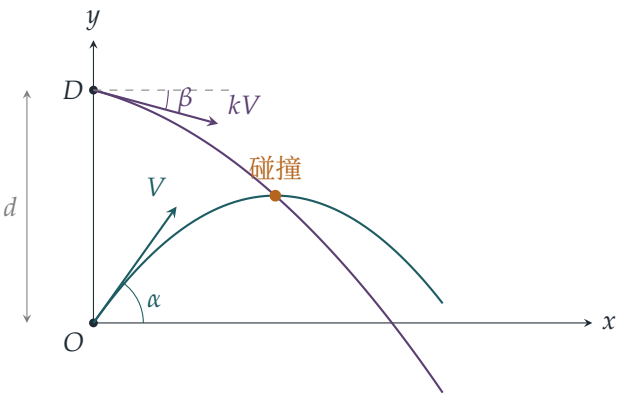
step.maths.org/questions/09-s1-q9

關鍵思路

兩個只受重力作用的質點（particle）具有相同的加速度，所以比較兩者位置時，$-\frac{1}{2}gt^2$ 項會互相抵消：相對於對方而言，它們是以恆定速度沿直線運動。碰撞（collision）的意思是在同一時刻 T，兩者的水平位移相等，垂直位移也相等。水平方向的方程立即給出餘弦關係式。垂直方向的方程含有 β，我們利用 $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$ 和餘弦關係式把它消去。

解答

我們把 P 和 Q 當作在重力下自由運動的質點，不計空氣阻力（air resistance）。要令兩者相撞，它們必須在同一鉛垂平面內、朝同一水平方向拋出。取 O 為原點，x 軸沿該水平方向，y 軸垂直向上，於是 D 的坐標為 $(0, d)$。



在時刻 t，兩質點的位置為

$$\begin{aligned} P: &\quad x = Vt\cos\alpha, && y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ Q: &\quad x = kVt\cos\beta, && y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

其中 Q 的垂直速度帶負號，是因為 β 是從水平線向下量度的。

餘弦關係式與 T 的方程

碰撞時，$t = T > 0$，而且兩者的坐標相同。水平方向上，

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

兩邊除以 $VT \neq 0$，便得 $\cos\alpha = k\cos\beta$，正是所求。

垂直方向上，兩邊的 $-\frac{1}{2}gT^2$ 項互相抵消，餘下

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{所以} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

> **想一想** 怎樣消去 β？

我們已知 $k\cos\beta$ 可用 α 表示，所以把方程平方，引入 $k^2\sin^2\beta$，而

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

把垂直方向的方程平方再代入，

$$\begin{aligned} (k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 &= d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha, \\ (k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \\ (k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \end{aligned}$$

當中用了 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$。這就是所求的方程。

把它看成 T 的二次方程（quadratic），由於 $k > 1$，兩根之積為 $-d^2/((k^2-1)V^2) < 0$。所以恰好有一個正根，而這個根就是碰撞的時刻。

在 P 的最高點碰撞

P 的垂直速度為 $V\sin\alpha - gt$，當 $t = V\sin\alpha/g$ 時為零。所以這裏 $T = V\sin\alpha/g$。代入二次方程，

$$(k^2-1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g} - d^2 = 0.$$

乘以 g^2 並合併含 $\sin^2\alpha$ 的項，得 $\sin^2\alpha\,((k^2-1)V^4 + 2gdV^2) = g^2d^2$，所以

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{g^2d^2}{V^2((k^2-1)V^2 + 2gd)}}$$

由於 $k > 1$，括號內的式子為正，所以這個表達式有意義。

不等式

由於 $\sin^2\alpha \le 1$ 而分母為正，

$$\begin{aligned} g^2d^2 &\le (k^2-1)V^4 + 2gdV^2, \\ g^2d^2 - 2gdV^2 + V^4 &\le k^2V^4, \\ (gd - V^2)^2 &\le (kV^2)^2. \end{aligned}$$

$|gd - V^2|$ 和 kV^2 都是非負的，所以取平方根後不等式（inequality）的方向不變：$|gd - V^2| \le kV^2$。特別地，$gd - V^2 \le kV^2$，即

$$gd \le (1+k)V^2,$$

正是所求。等號成立需要 $\sin^2\alpha = 1$，即 P 垂直向上拋出。

驗算

- 取 $g = 10$，$V = 10$，$k = 2$，$d = 10$。公式給出 $\sin^2\alpha = \frac{100\cdot 100}{100(300+200)} = \frac{1}{5}$，所以 $T = V\sin\alpha/g = 1/\sqrt{5}$。於是二次方程成為 $3\cdot 100\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{1}{5} - 100 = 60 + 40 - 100 = 0$。取 $\cos\beta = \cos\alpha/2$，兩個質點在時刻 T 的高度都是 1。這裏 $gd = 100 \le 300 = (1+k)V^2$。
- 我們作了一次數值檢驗：隨機選取數千組 V、k、α、T，逐步推算兩個質點的運動，結果證實碰撞、餘弦關係式、二次方程和 $\sin^2\alpha$ 的公式全部成立，誤差只在捨入誤差的範圍之內。
- 極限情況：若 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$，則 $\cos\beta \to 0$，所以兩者都沿垂直方向運動。P 在時間 V/g 內上升至高度 $V^2/(2g)$，而 Q 下降了 $kV^2/g + V^2/(2g)$，所以 $d = (1+k)V^2/g$：等號成立，與預測一致。

常見錯誤

- 弄錯 Q 的垂直速度的正負號：它是從水平線向下拋出的，所以垂直速度為 $-kV\sin\beta$。
- 保留 $\frac{1}{2}gT^2$ 項：這些項會互相抵消，T 的方程裏並沒有 g。
- 對 $(gd - V^2)^2 \le k^2V^4$ 取平方根時，直接寫成 $gd - V^2 \le kV^2$ 而沒有提及絕對值（modulus）。結論是對的，但理由是 $x \le |x|$。

STEP 之外

重力互相抵消這一點，讓我們初次體會到轉換參考系（frame of reference）的威力。在一個以加速度 g 自由下落的參考系中，兩個質點都以恆定速率沿直線運動，碰撞問題於是化為相對速度（relative velocity）的幾何問題。這正是愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）背後的想法，許多拋體攔截問題也因此一句話就能解決。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對相對運動和非慣性參考系（non-inertial frame）有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。