詳細解答

STEP I 2009，第 8 題

純數學 • 圓與切線

STEP I 2009，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q8

關鍵思路

一個圓與一條直線相切（touch），當且僅當圓心到該直線的距離等於半徑。各個圓 C 的圓心都位於一條通過原點的直線上，而這條直線平分（bisect）x 軸與 $3y = 4x$ 之間的夾角，所以每一個這樣的圓都與這兩條直線相切。因此 C 就是嵌在這個角內的整個圓族，而第 (ii) 部分的內切圓（incircle）必定是其中之一：我們只需選出同時令圓與第三條邊相切的 t 值。

解答

第 (i) 部分

圓 C 的圓心為 $P = (2t, t)$，半徑為 t。由於 $t > 0$，圓心位於 x 軸上方，與它的距離為 t，恰好等於半徑。所以 C 與 $y = 0$ 相切，切點為 $(2t, 0)$。

直線 OP 的斜率（gradient）為 $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$，所以 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，並且

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

這正是所要證明的。

現在設 β 為 x 軸與直線 $3y = 4x$ 之間的銳角，該直線的斜率為 $\frac{4}{3}$。於是 $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$。由於 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$（因為 $\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$），角 2α 也是銳角，而 tan 在銳角範圍內是一對一（one-to-one）的，所以 $\beta = 2\alpha$。

? **想一想** 為甚麼 $\beta = 2\alpha$ 可以告訴我們 C 與 $3y = 4x$ 相切？

直線 OP 與 x 軸的夾角為 α，與直線 $3y = 4x$ 的夾角為 $\beta - \alpha = \alpha$，所以 OP 平分這兩條直線之間的夾角。由 P 向兩條直線分別作垂線，得到兩個直角三角形，它們有相同的斜邊（hypotenuse）OP，而且在 O 處的角同為 α，所以兩個垂直距離（perpendicular distance）相等，都是 $OP\sin\alpha$。到 x 軸的距離為 t，所以由 P 到 $3y = 4x$ 的距離也是 t，即半徑。因此 C 與 $3y = 4x$ 相切。

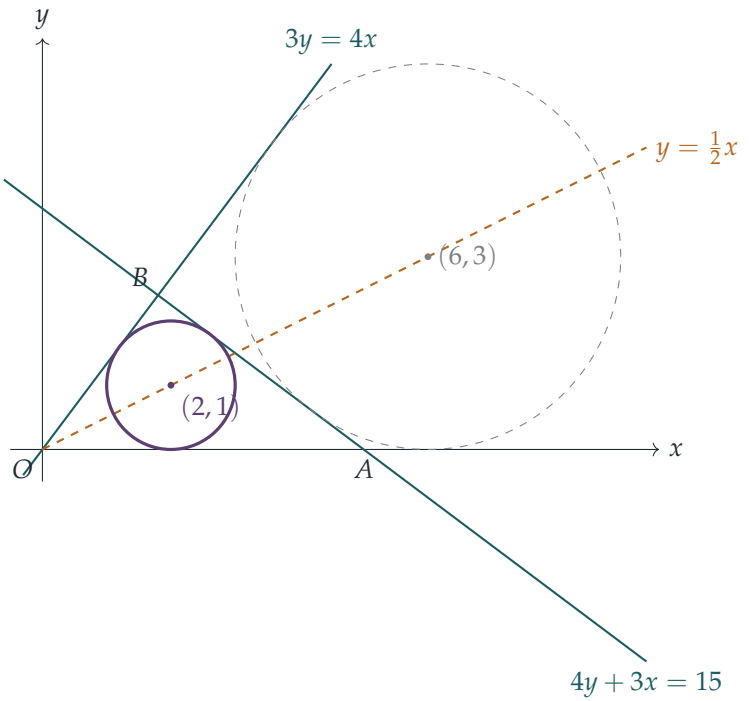
（作為覆核，由點到直線的垂直距離公式，可得由 $(2t, t)$ 到 $4x - 3y = 0$ 的距離為 $\frac{|8t-3t|}{5} = t$。）

第 (ii) 部分

首先找出這個三角形。直線 $y = 0$ 與 $3y = 4x$ 相交於 $O = (0,0)$；$y = 0$ 與 $4y + 3x = 15$ 相交於 $A = (5,0)$。至於第三個頂點，把 $y = \frac{4}{3}x$ 代入 $4y + 3x = 15$：

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

所以 $B = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$。$3y = 4x$ 與 $4y + 3x = 15$ 的斜率分別為 $\frac{4}{3}$ 和 $-\frac{3}{4}$，兩者之積為 -1，所以三角形在 B 處有一個直角。它的三邊為 $OA = 5$、$OB = 3$ 和 $AB = 4$。



內切圓位於三角形之內，所以在 O 附近，它嵌在正 x 軸與直線 $3y = 4x$ 之間的銳角內，並與這兩條直線相切。它的圓心與這兩條直線等距，所以圓心位於該角的平分線上；根據第 (i) 部分，這條平分線就是直線 $y = \frac{1}{2}x$（即直線 OP）。若圓心為 $(2t, t)$，其中 $t > 0$，

則它與 $y = 0$ 的距離為 t，而這必定就是半徑。所以內切圓是第 (i) 部分的圓 C 其中之一。

餘下只需令 C 與第三條邊 $3x + 4y - 15 = 0$ 相切。由 $(2t, t)$ 到這條直線的距離必須等於 t：

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

要麼 $10t - 15 = 5t$，得 $t = 3$；要麼 $15 - 10t = 5t$，得 $t = 1$。

這兩個圓都與三條直線相切，但只有一個位於三角形之內。當 $t = 3$ 時，圓心 $(6, 3)$ 滿足 $3x + 4y = 30 > 15$，所以它位於 AB 的另一側，與 O（滿足 $3x + 4y = 0 < 15$）分處兩邊：這是一個*旁切圓*（excircle），即圖中的虛線圓。當 $t = 1$ 時，圓心 $(2, 1)$ 滿足 $3x + 4y = 10 < 15$，而且它在 $y = 0$ 之上、$3y = 4x$ 之下，所以它位於三角形之內。一個圓若圓心在三角形之內，並與三條邊都相切，則整個圓位於三角形之內，所以內切圓的圓心為 $(2, 1)$，半徑為 1：

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

驗算

對於兩條直角邊為 a, b、斜邊為 c 的直角三角形，內切圓半徑（inradius）為 $\frac{1}{2}(a + b - c)$；這裏 $\frac{1}{2}(3 + 4 - 5) = 1$，與所得結果一致。內切圓半徑亦等於面積 / 半周長 $= 6/6 = 1$。在數值上，把內心（incentre）計算為各頂點以邊長加權的平均值 $\frac{4O + 3A + 5B}{12}$，結果恰好是 $(2, 1)$，而由 $(2, 1)$ 到三條直線的距離全都是 1。

常見錯誤

- 解 $|10t - 15| = 5t$ 時忽略了絕對值，只求得 $t = 3$，而這是旁切圓，不是內切圓。
- 求得兩個根，卻沒有解釋為甚麼 $t = 1$ 才是位於三角形之內的那一個。
- 在第 (i) 部分，只說 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 所以 $\beta = 2\alpha$，卻沒有指出兩個角都是銳角。

STEP 之外

每個三角形都有一個內切圓和三個旁切圓，而這四個圓心正是內角平分線與外角平分線的交點；這裏求得的 $t = 3$ 就是與 O 相對的旁切圓。這些圓引領我們進入古典幾何中一個蘊藏豐富的寶庫，包括九點圓（nine-point circle），以及指出九點圓與這四個圓都相切的費爾巴哈定理（Feuerbach's theorem）。考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（幾何學入門）是探索這個課題的經典之作；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則提供更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。