詳細解答

STEP I 2009，第 7 題

純數學 • 分部積分法

> **STEP I 2009，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q7

關鍵思路

開首的積分用的是經典的「分部積分兩次，原來的積分又回來了」這一招：做完兩步之後，原來的積分會在等式右邊重新出現，於是我們把它當作方程中的未知數來求解。一旦對每一個整數 m 都得到 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ 的公式，其後各部分就只是按部就班的整理工作：把正弦與餘弦的乘積化為若干個單一餘弦之和，而每一項都可以立即積分。

解答

一般的積分

記 $I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$，並為簡便起見設 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$。取 $u = \cos mx$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ 作分部積分（integration by parts），

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

由於 m 是整數，$\cos 2m\pi = 1$，所以方括號一項等於 $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$。再作一次分部積分，這次取 $u = \sin mx$，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

這是因為 $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$，當中再次用到 m 是整數。把兩式合起來，

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{所以} \qquad (m^2+1)I_m = E.$$

? **想一想** 我們兜了一個圈，又得回 I_m。這是否一條死路？

不是：這正是我們想要的。等式 $I_m = E - m^2 I_m$ 是關於未知數 I_m 的一次方程（linear equation），而由於 $m^2 + 1 \neq 0$，我們可以把它除過去：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),$$

正如所求。（$m = 0$ 的情況亦包括在內：它只是說 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$。）留意整數這個條件的作用，是令邊界項（boundary terms）變得簡單；若 m 不是整數，這條公式並不成立。

第 (i) 部分

用複角公式（compound-angle formulae）展開，$\sin A \sin B$ 的項互相抵消：

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

取 $A = 6x$ 及 $B = x$，得 $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$。因此，在一般結果中取 $m = 7$ 及 $m = 5$，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}(I_7 + I_5) = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300} E = \frac{76}{2600} E = \frac{19}{650}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),\end{aligned}$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

這裏需要做兩次積化和差（product-to-sum）。把兩條複角公式相減而不是相加，得 $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$，所以取 $A = 4x$、$B = 2x$，

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

乘以 $\cos x$，並對每個乘積使用第 (i) 部分的恆等式，

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

現在每一項都可用一般結果處理，分別取 $m = 3, 1, 7, 5$：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}(I_3 + I_1 - I_7 - I_5) \\ &= \tfrac{1}{4}\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650} E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650} E.\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1).$$

驗算

- 對 $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m\sin mx)}{m^2+1}$ 求導，得 $\mathrm{e}^x\cos mx$，所以它是一個原函數（antiderivative）；在 2π 和 0 兩處代入求值，便重新得到一般結果。
- 在第 (ii) 部分的恆等式中代入 $x = 0$：左邊是 0，右邊是 $\frac{1}{4}(1+1-1-1) = 0$。吻合。
- 以數值方法（辛普森法則，Simpson's rule）計算，第 (i) 部分的積分是 15.6236…，第 (ii) 部分的積分是 72.3619…，與 $\frac{19}{650}E$ 及 $\frac{44}{325}E$ 相符，其中 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1 \approx 534.49$。

常見錯誤

- 第二次分部積分時弄錯正負號：$\sin mx$ 的導數是 $+m\cos mx$，連同分部積分公式中的負號，得出的是 $-m^2 I_m$。
- 在每次積化和差時漏掉因子 $\frac{1}{2}$，以致第 (ii) 部分得到 $\frac{1}{2}$ 而不是 $\frac{1}{4}$。

STEP 之外

更利落的做法是寫 $\cos mx = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$，於是 $I_m = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\dfrac{E}{1+\mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1+m^2}$，完全不需要分部積分。像我們在後面各部分所做的那樣，把一個函數拆成 $\cos mx$ 這些分量，正是傅立葉級數（Fourier series）的起點；傅立葉級數是大學一年級分析和微分方程（differential equations）中的核心工具。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）有一段易讀的介紹，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像闡釋複分析的名著）則說明了為何從指數函數的角度看問題會如此奏效。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。