詳細解答

STEP I 2009，第 6 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2009，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q6

關鍵思路

積分上下限 $1/m$ 與 m 在 $x \mapsto 1/x$ 之下互相對調，所以最自然的做法就是試用這個代換（substitution）：它把區間映射到自身，並把冪 x^{-n} 換成冪 u^{n-1}。有了第 (ii) 部分的結果，我們便可以把第 (iii) 部分中難以處理的各項，化為第 (i) 部分那個容易處理的積分。在 (iii)(b) 中，區間不再對稱，但同一個代換會把 $[1,2]$ 送到 $[\frac{1}{2},1]$，於是兩半又可以重新拼合起來。

解答

第 (i) 部分

以 $x+1$ 除 x^2，得

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

由於在該區間上 $x+1>0$（因為 $m>0$），所以

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

對數部分給出

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

多項式部分給出

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(m^2-\frac{1}{m^2}\Big)-\Big(m-\frac{1}{m}\Big) &= \Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)-1\Big]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2}=\frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

把兩部分相加，即得所求結果。

第 (ii) 部分

設 $x=1/u$，則 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$。當 $x=1/m$ 時，$u=m$；當 $x=m$ 時，$u=1/m$。此外

$$x^n(x+1)=\frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中負號用來把上下限對調回來。這就是所求結果。

第 (iii) 部分

(a) 把被積函數（integrand）拆開：

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

積分區間是 $[\frac{1}{2},2]$，即第 (ii) 部分的區間取 $m=2$。在第 (ii) 部分中取 $n=3$，得

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

這是第一項的三倍。由第 (i) 部分取 $m=2$，得

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2=\frac{3}{8}+\ln 2.$$

所以積分等於 $4(\frac{3}{8}+\ln 2)$，即

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

(b) 現在

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

想一想 現在的區間是 $[1,2]$，並非 $[1/m, m]$ 的形式。第 (ii) 部分還能派上用場嗎？

可以：代換 $x = 1/u$ 在任何由正數組成的區間上都適用，只是上下限會隨之移動。計算與第 (ii) 部分完全相同，其中 $x = 1$ 對應 $u = 1$，$x = 2$ 對應 $u = \frac{1}{2}$，由此可得

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

它的被積函數與第一項相同，而區間恰好相鄰，所以兩者合起來就是第 (i) 部分取 $m = 2$ 時的積分：

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

餘下的一項是

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

相加得

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

驗算

- 在第 (i) 部分中，$m = 1$ 時積分區間只有一點，而右邊確實是 $0 + \ln 1 = 0$。把 m 換成 $1/m$ 應該令積分變號（上下限對調），而公式的確會變號。
- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算，(iii)(a) 得 4.272589，與 $\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$ 吻合；(iii)(b) 得 1.473612，與 $\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$ 吻合。
- (b) 的合理性檢查：在 $[1,2]$ 上，被積函數由 1.5 下降至約 1.37，然後上升至約 1.71，所以答案接近 1.47 是合理的。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ 中的負號，或忘記對調上下限；兩者都必須做，而它們會互相抵消。
- 在 (iii)(b) 中，把第 (ii) 部分當作區間是 $[\frac{1}{2}, 2]$ 來套用。代換把 $[1,2]$ 移到 $[\frac{1}{2}, 1]$，而這正是各項能夠拼合起來的原因。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 1/x$ 是區間 $[1/m, m]$ 的一個對稱（symmetry），而利用定義域的對稱性來找出積分之間的關係，是分析學（analysis）中反覆出現的技巧。例如，$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ 就是這樣證明的。在複分析（complex analysis）中，同樣的反演（inversion）$z \mapsto 1/z$ 會把單位圓的內部與外部對調，並成為一件基本工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）對反演有十分優美的幾何闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。