詳細解答

STEP I 2009，第 5 題

純數學 • 約束最優化

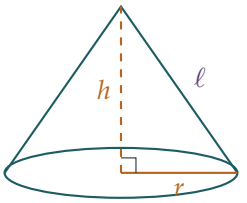
STEP I 2009，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q5

關鍵思路

這裏有三個長度，但只有兩個是自由的，因為 r、h 和 ℓ 由畢氏定理（Pythagoras' theorem）聯繫在一起：$\ell^2 = r^2 + h^2$。固定其中一個量，又會再減少一個自由度，所以在每一部分，我們都把要取駐值（stationary value）的量寫成只含 r 的函數，然後求導。平方根會令代數運算變得繁複，因此改用 V^2 或 A^2 來計算會划算得多：它們取駐值的位置，與 V 或 A 取駐值的位置完全相同。



解答

在整個解答中，r、h 和 ℓ 均為正數，而且由橫切面中的直角三角形可得

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

由於 $V > 0$ 及 $A > 0$，V^2 的導數（derivative）是 $2V\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$，它恰好在 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ 等於零時才等於零；A 的情況亦相同。因此我們可以改為求這些平方的駐點（stationary point）。

第 (i) 部分

當 A 固定時，$\ell = \dfrac{A}{\pi r}$，所以

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

（要得到一個真正的圓錐體，必須有 $h > 0$，即 $A > \pi r^2$。）於是

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

把 A 視為常數，對 r 求導，得

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

由於 $r > 0$，上式恰好在以下情況等於零：

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

這就是第一個結果。取正平方根，得 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$，因此

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

正如題目所求。（留意 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$，所以這確實是一個圓錐體。）

當 r 遞增並經過這個值時，V^2 的導數由正變負，所以這個駐值是極大值（maximum）：這就是在給定曲面面積（curved surface area）下體積最大的圓錐體。由 $\ell^2 = r^2 + h^2$ 還可得 $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$，所以 $h = \sqrt{2}\, r$。

第 (ii) 部分

現在 V 是固定的，所以 $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$，而

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

把 V 視為常數，對 r 求導，得

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

它恰好在以下情況等於零：

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{所以} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\pi r^3$$

（因為 $V > 0$，故取正根）。

想一想 我們已求得以 r 表示的 V，但題目要求的是 h。怎樣才能得到它？

再用一次體積公式：$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$。令它等於 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$，並約去 $\frac{1}{3}\pi r^2$，得

$$h = \sqrt{2}\,r.$$

這一次導數由負變正（當 r 很小時，$9V^2/r^2$ 這一項非常大；當 r 很大時，$\pi^2 r^4$ 這一項非常大），所以這是在給定體積下曲面面積最小的圓錐體。

想一想 兩部分都得出相同的形狀 $h = \sqrt{2}\,r$，這是巧合嗎？

不是。如果一個圓錐體在其面積之下體積最大，那麼它在其體積之下面積也必然最小：任何體積相同而面積較小的圓錐體，都可以按比例放大至原來的面積，這樣它的體積就會更大，而這是不可能的。由於題目只把形狀確定到相差一個縮放比例，兩部分必定選出相同的比 $h : r$。

驗算

- 在第 (i) 部分取 $r = 1$：則 $A = \sqrt{3}\,\pi$，$\ell = \sqrt{3}$，$h = \sqrt{2}$，而 $\pi r\ell = \sqrt{3}\,\pi$，與應有的結果一致。把 A 保持在 $\sqrt{3}\,\pi$，將 r 稍為調整至 0.99 或 1.01，所得的體積都略小一些。
- 對隨機選取的固定 A 以數值方法求 V 的最大值，以及對隨機選取的固定 V 求 A 的最小值，每次都得出 $h/r \approx 1.41421$，即 $\sqrt{2}$。
- 量綱（dimensions）：A^2 和 $\pi^2 r^4$ 都是（長度）^{4}；V^2 和 $\pi^2 r^6$ 都是（長度）^{6}。

常見錯誤

- 忘記了 ℓ 取決於 r 和 h：在第 (i) 部分把 ℓ 當作常數，或在第 (ii) 部分把 h 當作常數，而事實上只有 A（或 V）是固定的。
- 保留着平方根直接對 V 求導；這樣做是可行的，但很容易出錯。先平方就完全不必用上鏈式法則（chain rule）。

STEP 之外

在固定某個量的情況下求另一個量的極值，是一個約束優化（constrained optimisation）問題。在大學裏你會學到拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers），它不必消去變量就能處理約束條件，並且解釋了本題兩部分之間的「對偶性」（duality）。若想找一本清晰的

入門書來學習多元微積分（multivariable calculus）和拉格朗日乘數法，可以看 Stewart 的 *Calculus*；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的優化練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。