詳細解答

STEP I 2009，第 4 題

純數學 • 餘弦公式

> **STEP I 2009，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q4

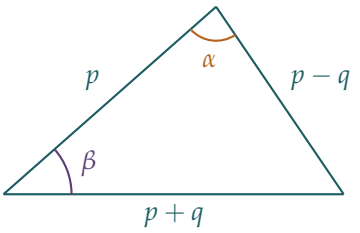
關鍵思路

在三角形中，最大的角對着最長的邊，最小的角對着最短的邊。因此，利用餘弦定理（cosine rule）可以直接以 p 和 q 表示 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$，而要證明的恆等式（identity）只是代數運算。至於第二部分，由 $\alpha = 2\beta$ 可用二倍角公式（double-angle formula）把 $\cos\alpha$ 以 $\cos\beta$ 表示，恆等式於是變成一條只含 $\cos\beta$ 的方程。

解答

恆等式

由於 $p - q < p < p + q$，最大的角 α 對着邊 $p + q$，最小的角 β 對着邊 $p - q$。



對 α 應用餘弦定理，得

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p-4q}{2(p-q)},$$

對 β 則得

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

這裏我們約去了 p，由於 $p>0$，這樣做是容許的。於是

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

所以

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

另一邊則是

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

兩個表達式相等，所以 $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$，正是所要證明的結果。

（要令三角形存在，必須有 $(p-q)+p>p+q$，即 $p>2q$。這時恆等式兩邊都是正數，但上面的代數運算並不依賴這一點。）

$\alpha = 2\beta$ 的情況

設 $c=\cos\beta$。那麼 $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$，所以 $1-\cos\alpha = 2(1-c^2)=2(1-c)(1+c)$。代入恆等式，得

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

想一想 我們可以把兩邊同時除以 $1+c$ 嗎？

可以。β 是三角形的一隻角，所以 $0<\beta<\pi$，而 $c=\cos\beta>-1$，即 $1+c\neq 0$。兩邊同時除以這個因子，得

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

所以 $c=\frac{3}{4}$ 或 $c=\frac{3}{2}$。餘弦值不可能大於 1，因此我們捨去 $\frac{3}{2}$。由此可知 $\cos\beta=\frac{3}{4}$，正是所要證明的結果。

三邊之比

利用第一部分所得的 $\cos\beta$ 公式，

$$\frac{p+4q}{2(p+q)} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad 4p+16q = 6p+6q \quad \Longrightarrow \quad p = 5q.$$

這個結果滿足 $p > 2q$，所以三角形確實存在。它的三邊是 $p-q = 4q$、$p = 5q$ 和 $p+q = 6q$，因此三邊之比是

$$4 : 5 : 6.$$

驗算

在邊長為 $4,5,6$ 的三角形中，由餘弦定理得 $\cos\beta = \frac{25+36-16}{60} = \frac{3}{4}$ 和 $\cos\alpha = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}$。另外 $2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$，這就確認了 $\alpha = 2\beta$（兩隻角都在 $(0,\pi)$ 之內，而餘弦函數在這個區間上是一對一（one-to-one）的）。以數值計算，$\beta \approx 0.7227$ 弧度（radians），$\alpha \approx 1.4455$ 弧度。在這個三角形中，恆等式變成 $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}$。我們也用 10^5 個滿足 $p > 2q$ 的隨機三角形測試過這條恆等式，兩邊之差不超過 3×10^{-15}。

常見錯誤

- 把角與邊配錯。最大的角對着的是最長的邊，即 $p+q$。
- 約去因子 $1+c$ 時沒有說明它為何不等於零，或者保留了 $c = \frac{3}{2}$ 這個根。
- 答案只寫 $p = 5q$，而沒有給出三邊之比 $4:5:6$。

STEP 之外

若不計縮放，邊長為 $4,5,6$ 的三角形是唯一一個三邊成等差數列（arithmetic progression）而最大角是最小角兩倍的三角形。像「哪些三角形的邊長是整數，而且各角成指定的比？」這類問題，很快就會引出丟番圖方程（Diophantine equations），以及曲線上有理點（rational points）的參數化，情況與畢氏三元數（Pythagorean triples）十分相似。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 很適合用來了解這些想法如何發展，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的幾何和三角學題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。