詳細解答

STEP I 2009，第 3 題

純數學 • 實根的計數

> **STEP I 2009，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

關鍵思路

把等式兩邊同時取適當的冪次來消去根號，但要留意這一步會失去甚麼。平方根（square root）永不為負，所以只有同時要求 $x \geq 0$，平方這一步才可以逆推回去；實數立方根（cube root）則沒有這種限制，因為每個實數都恰好有一個實數立方根。處理好這一點之後，每一次點算解的個數都歸結為一個二次方程的根，而這些根的正負號可以從兩根之和與兩根之積看出來。

解答

第 (i) 部分：平方根方程

這裏 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$ 是指非負的平方根，所以任何解都滿足 $x \geq 0$，而兩邊平方得 $x^2 = a - x$，即 $x^2 + x - a = 0$。反過來，若 $x \geq 0$ 且 $x^2 + x - a = 0$，則 $a - x = x^2 \geq 0$，並且 $(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$。因此

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ 且 } x \geq 0,$$

於是我們要點算的是二次方程 $x^2 + x - a = 0$ 的非負根的個數。設它的根為 α, β（當兩根為實數時），則

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

情況 $a > 0$。判別式（discriminant）$1 + 4a$ 為正，所以有兩個實根，而兩根之積 $-a$ 為負。因此一根為正、另一根為負：恰好有一個解。

情況 $a = 0$。二次方程為 $x(x+1) = 0$，兩根為 0 和 -1。只有 $x = 0$ 是非負的：恰好有一個解。

情況 $a < 0$。若 $a < -\frac{1}{4}$，判別式為負，根本沒有實根。若 $-\frac{1}{4} \le a < 0$，兩根為實數，兩根之積 $-a$ 為正，所以兩根同號，而兩根之和為 -1，所以兩根皆為負。無論哪一種情況都沒有非負根，因此無解。

所以當 $a \ge 0$ 時方程有一個實數解，當 $a < 0$ 時沒有實數解，這正是所要證明的。

第 (i) 部分：立方根方程

每個實數 t 都恰好有一個實數立方根，而且 $x = t^{\frac{1}{3}} \iff x^3 = t$，當中沒有正負號的條件。所以原方程等價於

$$x^3 - (1+a)x + a = 0.$$

各項係數之和為 $1-(1+a)+a = 0$，所以 $x = 1$ 必定是一個根，把對應的因式除去後得

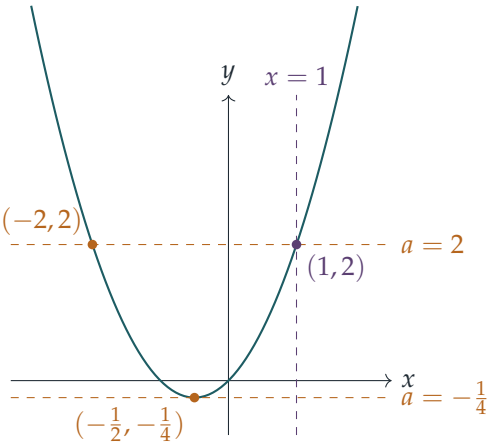
$$x^3 - (1+a)x + a = (x-1)(x^2 + x - a).$$

同一個二次式再次出現，而方程的解就是 $x = 1$ 連同 $x^2 + x - a = 0$ 的實根，這次對正負號再沒有限制。

想一想 二次方程的根會不會與 $x = 1$ 重合，或者兩根彼此重合？

兩種情況都會發生，而它們正是令解的個數減少的情況。當 $1 + 4a = 0$，即 $a = -\frac{1}{4}$ 時，二次方程有重根（repeated root），該根為 $-\frac{1}{2}$。而當 $1 + 1 - a = 0$，即 $a = 2$ 時，$x = 1$ 是二次方程的根；這時 $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$，所以兩根為 1 和 -2。

把二次方程寫成 $a = x^2 + x$，它的實根就是高度為 a 的水平線與拋物線（parabola）$y = x^2 + x$ 相交之處，而這條拋物線的最低點是 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$。額外的解 $x = 1$ 對應拋物線上的點 $(1, 2)$。



綜合各種情況，相異實數解的個數如下：

- $a < -\frac{1}{4}$：二次方程沒有實根，所以只有**一個**解，即 $x = 1$；
- $a = -\frac{1}{4}$：解為 1 和 $-\frac{1}{2}$，所以有**兩個**；
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ 或 $a > 2$：二次方程有兩個相異的根，兩者都不等於 1，再加上 $x = 1$，所以有**三個**；
- $a = 2$：解為 1 和 -2，所以有**兩個**。

第 (ii) 部分

與第 (i) 部分完全一樣，平方根是非負的，所以

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ 且 } x \geq 0,$$

（反方向成立，是因為由 $x \geq 0$ 和 $b + x = x^2$ 可得 $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$）。現在 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根之和為 1，兩根之積為 $-b$，而判別式為 $1 + 4b$。

情況 $b < -\frac{1}{4}$。沒有實根，所以**沒有**解。

情況 $b = -\frac{1}{4}$。二次方程為 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$，而 $x = \frac{1}{2} \geq 0$，所以有**一個**解。

情況 $-\frac{1}{4} < b < 0$。有兩個相異實根，兩根之積 $-b$ 為正，所以兩根同號，而兩根之和 1 為正，所以兩根皆為正：有**兩個**解。

情況 $b = 0$。二次方程為 $x(x - 1) = 0$，而 0 和 1 都是非負的：有**兩個**解。（事實上 $0 = \sqrt{0}$ 而 $1 = \sqrt{1}$。）

情況 $b > 0$。有兩個實根，兩根之積為負，所以一正一負：有**一個**解。

總結：當 $b < -\frac{1}{4}$ 時無解；當 $b = -\frac{1}{4}$ 時有一個解；當 $-\frac{1}{4} < b \leq 0$ 時有兩個解；當 $b > 0$ 時有一個解。

驗算

- 從圖像來看，第 (ii) 部分是問直線 $y = x$ 與半拋物線 $y = \sqrt{b + x}$ 在何處相交，而這條半拋物線由 $(-b, 0)$ 開始。當 $b = -\frac{1}{5}$ 時，解為 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$，約為 0.276 和 0.724，兩者都滿足 $x = \sqrt{x - 0.2}$，準確至小數點後多個位。
- 在立方根方程中取 $a = 2$，$x = 1$ 和 $x = -2$ 都成立：$(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$。
- 我們用電腦在細密的格點上點算了每個方程的根的個數，所取的 a 和 b 的值涵蓋每個分界點（$-\frac{1}{4}$、0、2）的兩側，所得的個數與上面的分情況討論一致。

常見錯誤

- 平方之後忘記了 $x \geq 0$：這樣會得出第 (i) 部分對每個 $a > -\frac{1}{4}$ 都有兩個解，這是錯的。
- 對立方根方程也加上 $x \geq 0$ 的條件。負數的立方根是名正言順的實數。
- 遺漏了 $a = 2$ 的情況：這時一次因式的根 $x = 1$ 同時也是二次式的根，所以三個解之中有兩個合而為一。

STEP 之外

關鍵在於：在 $\mathbb{R}$ 上，平方不是可逆的運算，立方卻是。$x \mapsto x^3$ 是 $\mathbb{R}$ 到自身的雙射（bijection），而 $x \mapsto x^2$ 則不是，所以要先選定非負的分支（branch），才談得上「那個」平方根。把形如 $x = f(x)$ 的方程看成不動點（fixed point）問題，並在參數變動時點算不動點的個數，就是分歧理論（bifurcation theory）的起點；在這套理論中，解會成對地誕生（如在 $a = -\frac{1}{4}$ 處），或者互換位置（如在 $a = 2$ 處）。若想細讀有關函數、反函數（inverse）和連續性（continuity）的嚴謹論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。