詳細解答

STEP I 2009，第 2 題

純數學 • 三次曲線的切線

> **STEP I 2009，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 1.9 節三次曲線的切線中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/tangents-cubic.html

關鍵思路

切線（tangent）在切點處與曲線相交兩次：把切線方程代入曲線方程時，切點對應的是一個重根（repeated root）。一旦知道三次方程（cubic）的一個重根，餘下的根便可藉因式分解直接得出，而這第三個交點的坐標原來是有理數。消去分母之後，曲線方程就化成一個立方和。

解答

在 $(-a, b)$ 處的切線

首先，$(-a, b)$ 確實在曲線上，因為 $x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$。

把 $y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ 對 x 作隱函數微分（implicit differentiation）（其中 a 和 b 為常數），得

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

在 $y \neq 0$ 的地方均成立。在 $(-a, b)$ 處，由於 $b > 0$，斜率（gradient）為 a^2/b^2。因此切

線為

$$\begin{aligned} y - b &= \frac{a^2}{b^2}(x + a) \\ b^2y - b^3 &= a^2x + a^3 \\ b^2y - a^2x &= a^3 + b^3, \end{aligned}$$

正是所需的結果。

當 $a = 1, b = 2$ 時的交點

現在曲線是 $y^3 = x^3 + 9$，而在 $(-1, 2)$ 處的切線是 $4y - x = 9$，即 $y = \frac{1}{4}(x + 9)$。代入曲線方程：

$$\begin{aligned} \frac{(x+9)^3}{64} &= x^3 + 9 \\ x^3 + 27x^2 + 243x + 729 &= 64x^3 + 576 \\ 0 &= 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153. \end{aligned}$$

每個係數都可被 9 整除，全式除以這個數後得

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

這正是題目要求的三次方程。

求 p, q, r, s

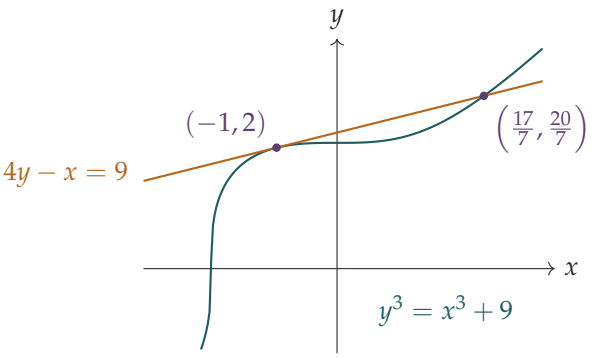
> **想一想** 我們已經知道這個三次方程的一個根。為甚麼它應該是一個二重根？

直線在 $x = -1$ 處與曲線相切，所以 $x = -1$ 是重根：在切點附近，直線與曲線在一階上吻合，因此兩者之差在該處以二階趨於零。故此 $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 是一個因式。比較 x^3 項和常數項，另一個因式必定是 $7x - 17$，我們可以驗證：

$$(x + 1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

所以切線與曲線再次相交於 $x = \frac{17}{7}$ 處，而在該處

$$y = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{17}{7} + 9\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{80}{7} = \tfrac{20}{7}.$$



由於這一點在 $y^3 = x^3 + 9$ 上，

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

乘以 7^3 得 $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$。最後一項並不是立方數，但 $9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$，所以

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

（原來的形式 $a^3 + b^3$（其中 $a = 1, b = 2$）就在這裏重新出現。）因此

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

我們可取 $p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$（後三個數的次序可任意排列）。

驗算

直接計算：$17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$。此外，三次方程的三個根是 $-1, -1, \frac{17}{7}$，其和為 $\frac{3}{7}$，其積為 $\frac{17}{7}$，與從係數讀出的 3/7 和 17/7 相符。以數值方法計算 $y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$ 在 $x = -a$ 處的導數，結果與 a^2/b^2 一致。

常見錯誤

- 沒有利用二重根：試圖從頭解這個三次方程，而不是先除去因式 $(x+1)^2$。
- 停在 $20^3 = 17^3 + 3087$ 這一步。我們需要的是立方相加的正整數，而 $3087 = 9 \cdot 7^3$ 必須拆成 $7^3 + 14^3$。

STEP 之外

這是處理三次曲線的經典*切線法*（tangent method）。一條直線與三次曲線相交於三點（按重數計算），所以兩個有理點（rational point）（或如本題般，一個點計算兩次）便

會產生第三個有理點。在橢圓曲線（elliptic curve）上，這種弦切作圖法（chord-and-tangent construction）成為一個羣運算法則（group law），是現代數論中一大領域的起點。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 討論了這類丟番圖方程（Diophantine equation），而 Silverman 與 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves* 則完整地發展了當中的幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。