詳細解答

STEP I 2009，第 13 題

概率與統計 • 排列與游程

> **STEP I 2009，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q13

關鍵思路

重要的只是女孩所佔的位置，而不是哪個女孩或男孩是誰。因此，與其處理 $(n+3)!$ 種次序，不如直接選出女孩所佔的三個位置所組成的集合：$\binom{n+3}{3}$ 個集合中每一個都是等可能的。要數出符合條件的集合，最簡單的做法是先把 n 個男孩排成一行，再考慮女孩要放進男孩之間及兩旁的哪些空隙。

解答

由於全部 $(n+3)!$ 種次序都是等可能的，而女孩的每一個三位置集合都對應相同數目（即 $3!\,n!$）的次序，所以女孩位置的集合在

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

個可能的集合上均勻分佈（uniformly distributed）。在整個解答中，K 只可能是 1、2 或 3。

排成一行的 n 個男孩會產生 $n+1$ 個空隙（第一個男孩之前有一個，最後一個男孩之後有一個，相鄰男孩之間共有 $n-1$ 個）：



把女孩放進空隙（同一個空隙可以放任意多個）便得到一行，而每一行都恰好以一種方式產生。同一個空隙內的女孩彼此相鄰；不同空隙內的女孩之間則至少隔着一個男孩。

第 (i) 部分

$K = 3$ 表示三個女孩全部連成一段，即她們都放進同一個空隙。空隙有 $n+1$ 種選法，所以

$$\mathrm{P}(K=3) = \frac{n+1}{\binom{n+3}{3}} = \frac{6(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

（等價的說法：由三個連續位置組成的一段，可以從第 $1, 2, \ldots, n+1$ 個位置中任何一個開始。）

第 (ii) 部分

$K = 1$ 表示沒有兩個女孩相鄰，即三個女孩分別在三個不同的空隙內。我們從 $n+1$ 個空隙中選出 3 個，共有 $\binom{n+1}{3}$ 種選法，然後在每個空隙放一個女孩。因此

$$\mathrm{P}(K=1) = \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n+3}{3}} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)},$$

正是所求。（當 $n = 0$ 或 1 時，空隙不足，而公式亦正確地給出 0。）

> **想一想** 為甚麼數目是 $\binom{n+1}{3}$，而不是 $\binom{n+1}{3} \times 3!$？

我們數的是位置的集合，而不是有名有姓的孩子的次序。選定使用哪三個空隙，女孩的位置便完全確定；至於哪個女孩坐在哪裏，早已包含在「每個位置集合都是等可能的」這個論斷之中。

第 (iii) 部分

首先我們需要求 $\mathrm{P}(K=2)$。由於 $K \in \{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=2) &= 1 - \frac{6}{(n+2)(n+3)} - \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2+5n+6) - 6 - (n^2-n)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6n}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

作為驗算，我們直接數一次：$K = 2$ 表示有一對女孩在同一個空隙，而第三個女孩在另一個空隙。先為那一對選空隙，再為單獨的一個選另一個空隙，共得 $(n+1)n$ 個集合，而 $(n+1)n/\binom{n+3}{3} = 6n/((n+2)(n+3))$，與上面的結果相同。

於是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= 1 \cdot \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + 2 \cdot \frac{6n}{(n+2)(n+3)} + 3 \cdot \frac{6}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2+11n+18}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)(n+9)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+9}{n+3}.\end{aligned}$$

驗算

- $n = 0$：只有女孩，所以必定有 $K = 3$，而 $\frac{n+9}{n+3} = 3$。
- $n = 1$：可能的排列是 GGGB、GGBG、GBGG、BGGG，四者等可能，所以 $K = 3$ 或 2 的概率各為 $\frac{1}{2}$，而 $\mathrm{E}(K) = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$。
- 當 $n \to \infty$ 時，$\mathrm{E}(K) \to 1$：男孩很多時，女孩幾乎不會相鄰。
- 我們以精確分數列舉了 $n = 0, \ldots, 9$ 的所有位置集合(例如 $n = 3$ 時得 $\mathrm{P}(K = 1,2,3) = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{E}(K) = 2$)，並對 $n \leq 4$ 列舉了有標記的孩子的全部 $(n+3)!$ 種次序；所有結果都吻合。

常見錯誤

- 在同一個分數中，把有序排列的數目與位置集合的數目混在一起。選定一個樣本空間（sample space），然後貫徹使用。
- 忘記兩端的兩個空隙，結果用了 $n-1$ 個空隙而不是 $n+1$ 個。

STEP 之外

「男孩造出空隙，女孩放進空隙」這個技巧，就是隔板法（stars and bars）的想法；而隨機排列中最長連段（longest run）這個一般問題，則是一個經典課題：對於很長的隨機序列，最長連段的長度大致按序列長度的對數增長。大學本科的概率課程會透過指示變量（indicator variables）和母函數（generating functions）來處理這些問題。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）是學習如何發展這類計數論證的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。