詳細解答

STEP I 2009，第 12 題

概率與統計 • 概率與不等式

> **STEP I 2009，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q12

關鍵思路

這裏每個概率（probability）都是各袋糖果數目之積的和，再除以總數的某次冪，所以每次比較最終都是比較兩個以 a, b, c 為變量的多項式（polynomial）。開首的不等式（inequality）$x^2+y^2 \geq 2xy$ 正是為此而設的工具。在第 (ii) 部分，直接數算「恰好兩顆同色」相當繁瑣。先數算另外兩種情況（全部同色、全部不同色），再從 1 中減去，會容易得多。

解答

不等式

對任意實數 x 和 y，

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2 \geq 0,$$

因為實數的平方永不為負。所以 $x^2+y^2 \geq 2xy$，等號恰好在 $x=y$ 時成立。

第 (i) 部分

每個袋有 $a+b$ 顆糖果，而兩次抽取來自不同的袋，所以互相獨立（independent）。設 S 為兩顆糖果同色的事件（event），D 為兩顆糖果不同色的事件。那麼

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(\text{紅、紅})+\mathrm{P}(\text{藍、藍})=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{2ab}{(a+b)^2},$$

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(\text{紅、藍})+\mathrm{P}(\text{藍、紅})=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$$

兩個分母相等且為正數，而由上面的不等式可知 $2ab \le a^2 + b^2$。因此 $\mathrm{P}(S) \le \mathrm{P}(D)$，正如所求，等號只在 $a = b$ 時成立。

第 (ii) 部分

記 $n = a + b + c$，即每個袋中糖果的數目。各袋的內容如下：

	紅	白	黃
第 1 袋	a	b	c
第 2 袋	b	c	a
第 3 袋	c	a	b

三次抽取互相獨立，所以從各袋（按次序）抽出某一指定顏色的概率，就是三個相應數目之積除以 n^3。設 A 為三顆糖果全部同色的事件，T 為恰好兩顆同色的事件，E 為三顆全部不同色的事件。這三個事件涵蓋了所有可能，而且互不重疊。

全部同色。 沿表中每一直行向下讀，

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

全部不同色。 從第 1、2、3 袋抽出的顏色，構成紅、白、黃的 $3! = 6$ 種排列之一：

$$\text{紅白黃：}a \cdot c \cdot b \quad \text{紅黃白：}a \cdot a \cdot a \quad \text{白紅黃：}b \cdot b \cdot b$$
$$\text{白黃紅：}b \cdot a \cdot c \quad \text{黃紅白：}c \cdot b \cdot a \quad \text{黃白紅：}c \cdot c \cdot c$$

所以

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

? **想一想** 怎樣才能由這兩個答案得出 $\mathrm{P}(T)$，而不必列出餘下的 18 個結果？

由於 $\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$，我們需要 $n^3 = (a + b + c)^3$ 的展開式。它包含三個立方項、六個形如 a^2b 而係數為 3 的項，以及係數為 6 的 abc：

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a + b + c)^3},\end{aligned}$$

這就是題目給出的結果。三顆糖果全部同色的概率是

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a+b+c)^3}.$$

推論。 把六個項按公因子兩兩分組：

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2+c^2\right) + b\left(c^2+a^2\right) + c\left(a^2+b^2\right).$$

由開首的不等式，$b^2 + c^2 \geq 2bc$；又因為 $a > 0$，乘上後不等號方向不變：$a(b^2+c^2) \geq 2abc$。同理 $b(c^2+a^2) \geq 2abc$ 及 $c(a^2+b^2) \geq 2abc$。相加得

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

乘以 $3/n^3 > 0$，

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

正如所求。等號成立需要 $b = c$、$c = a$ 和 $a = b$ 同時成立，所以只在 $a = b = c$ 時成立。

驗算

- 當 $a = b = c$ 時，每個袋中三種顏色各佔三分之一，所以 $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$ 及 $\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$，餘下 $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$：這正是等號成立的情況。
- 當 $a, b, c = 1, 2, 3$ ($n = 6$) 時：$\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$ 及 $\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$。三者之和為 1，而 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{1}{12}$ 的 8 倍。
- 我們以精確窮舉（enumeration）的方法，對 a, b, c 由 1 至 8 的每一組取值驗證了全部三條公式，並以模擬（simulation）作檢驗（取 $a, b, c = 2, 3, 5$，200 000 次試驗得出 0.659，而 $\mathrm{P}(T)$ 的精確值為 0.66）。

常見錯誤

- 把各袋的內容次序寫錯。第 2 袋有 a 顆黃色糖果，而不是 a 顆紅色糖果；像上面那樣列一個表就可避免這種錯誤。
- 以為 $\mathrm{P}(E)$ 中每種排列都給出 abc。其實只有三種如此；紅黃白、白紅黃和黃白紅這三種排列給出的是 a^3、b^3 和 c^3。
- 把不等式乘以 a、b 或 c 時，忘記說明 $a, b, c > 0$。

STEP 之外

最後的不等式是 Muirhead 不等式(Muirhead's inequality)的一個特例，後者是比較單項式 (monomial) 對稱和的一般法則；在這裏它說明形如 a^2b 的各項之和，不小於形如 abc 的各項之和。第 (i) 部分是同一想法在兩個變量時的情況，而兩者都建基於算術—幾何平均不等式 (AM–GM inequality)。想進一步了解計數論證和互補事件 (complementary events)，可參閱 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（概率論入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。