詳細解答

STEP I 2009，第 11 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP I 2009，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q11

關鍵思路

每一個一維碰撞都由兩條方程支配：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）。處理能量的竅門，是把每個質點的損失寫成平方差 $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$，因為動量守恆把因式 $u-p$ 和 $q-v$ 連繫起來。一旦抽出公因式 $u-p$，餘下的括號正好就是恢復定律所描述的東西。

解答

我們把兩個質點模擬為在光滑桌面上沿一條直線運動，速度以 **i** 的方向量度。由於 $u > v$，質量為 m 的質點在後面，並會追上前面的質點。水平方向沒有外力，所以動量守恆：

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{所以} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

牛頓恢復定律指出，分離速率是接近速率的 e 倍：

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



碰撞前（速度沿 **i** 方向），$u > v$

第 (i) 部分

動能（kinetic energy）的損失為

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2-p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2-q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

根據 (1)，我們可以把 $M(q-v)$ 換成 $m(u-p)$，於是可抽出因式 $\frac{1}{2}m(u-p)$：

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u+p)-(q+v)]\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v)-(q-p)]\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v)-e(u-v)] \qquad \text{根據 (2)}\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

想一想 一條能量損失的公式，怎樣能告訴我們關於 p 的事情？

碰撞不可能產生動能，所以 $\Delta \geq 0$。在乘積 $\frac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$ 中，我們有 $m>0$、$u-v>0$（已知）和 $1-e>0$（因為 $e<1$）。所以 Δ 的正負號就是 $u-p$ 的正負號，而 $\Delta \geq 0$ 迫使 $u \geq p$。質量為 m 的質點不可能在 $\mathbf{i}$ 的方向上加速，這是合理的，因為 M 施加於它的衝量（impulse）是向後的。

如果你不想把 $\Delta \geq 0$ 當作物理事實來依賴，可以直接解 (1) 和 (2)：

$$p = \frac{mu+Mv-Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{所以} \qquad u-p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

對 $e \geq 0$ 成立。這就確認了 $u \geq p$，因而 $\Delta \geq 0$。

第 (ii) 部分

每個質點損失相同而非零的能量，所以

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

根據 (1)，$M(v-q) = -m(u-p)$，所以右邊是 $-\frac{1}{2}m(u-p)(v+q)$，於是

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

左邊非零，所以 $m(u-p) \neq 0$，我們可以除以 $\frac{1}{2}m(u-p)$：

$$u+p = -(v+q), \qquad \text{即} \qquad u+v+p+q = 0. \tag{3}$$

現在 (2) 和 (3) 給出了 p 與 q 的和與差：

$$p+q = -(u+v), \qquad q-p = e(u-v),$$

所以

$$p = -\tfrac{1}{2}[(u+v)+e(u-v)], \qquad q = -\tfrac{1}{2}[(u+v)-e(u-v)].$$

我們還未用上動量守恆的完整形式，而正是它決定了 e 的值。代入 $mp+Mq = mu+Mv$ 並乘以 2：

$$\begin{aligned} -(m+M)(u+v)+(M-m)e(u-v) &= 2mu+2Mv, \\ (M-m)e(u-v) &= (m+M)(u+v)+2mu+2Mv \\ &= (M+3m)u+(3M+m)v. \end{aligned}$$

由於 $u-v>0$，而且當 $m \neq M$ 時 $M-m \neq 0$，我們可以相除而得

$$e = \frac{(M+3m)u+(3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

這正是所求的結果。

驗算

- 取 $m=1$、$M=3$、$u=1$、$v=-\frac{1}{2}$。公式給出 $e = \frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$。於是 $p=-\frac{1}{2}$ 及 $q=0$，而動量亦吻合：$1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}+0$。每個質點損失 $\frac{3}{8}$ 的能量，而且 $u+v+p+q = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0 = 0$。
- 當 $e=1$ 時，(i) 的公式給出零損失，這正符合完全彈性碰撞（perfectly elastic collision）應有的情況。
- 電腦以精確分數在 2000 個隨機碰撞上檢驗了 (i)，並在 455 個滿足 $0 \leq e < 1$ 的隨機個案上檢驗了 (ii)。

常見錯誤

- 把恢復定律寫反了：應該是 $q-p = e(u-v)$，即分離除以接近，而這裏兩者都以正數量度。
- 除以 $u-p$ 卻沒有說明它為何非零。題目中「非零的能量」這幾個字，正是為此而設。

STEP 之外

(i) 中的因式分解，是在質心參考系（centre-of-mass frame）中考慮問題的一個漂亮結果。在這個參考系中，總動量為零，動能為 $\frac{1}{2}\mu$(相對速率)^2，其中約化質量（reduced mass）為 $\mu = \frac{mM}{m+M}$，而損失則為 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$。約化質量和質心參考系會在二體軌道和粒子散射中再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。