詳細解答

STEP I 2009，第 10 題

力學 • 斜面上的連接質點

STEP I 2009，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

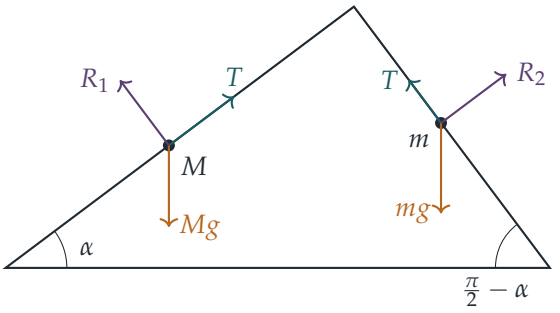
step.maths.org/questions/09-s1-q10

關鍵思路

由於繩子不可伸長（inextensible），滑輪又是光滑的，兩個質點其實是作為一個系統一起運動：當 M 沿其斜面向下移動距離 s 時，m 便沿其斜面向上移動同樣的距離 s，而且兩邊的張力（tension）相同。因此我們比較重力沿兩個斜面的分量，再對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），便可求出共同的加速度。最後一部分則是關於單一變量 α 的普通微積分求極大值問題。

解答

我們把兩個質點看作光滑斜面上的點質量，以一條輕而不可伸長的繩子繞過光滑滑輪相連，並假設系統由靜止開始運動。設 T 為張力，R_1、R_2 分別為作用於 M 和 m 的法向反作用力（normal reaction）。



頂角為 $\pi - \alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$，所以兩個斜面互相垂直。重力沿傾角為 α 的斜面向下的分量是 $Mg\sin\alpha$，而沿傾角為 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的斜面向下的分量是 $mg\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = mg\cos\alpha$。法

向反作用力垂直於斜面，所以對沿斜面的運動沒有影響。

第 (i) 部分

取「M 沿其斜面向下、m 沿其斜面向上」為正方向，加速度為 a。沿各自的斜面分解力：

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg\sin\alpha - T = Ma, \\ m: &\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

兩式相加消去 T：

$$a = \frac{g\,(M\sin\alpha - m\cos\alpha)}{M+m}.$$

由於當 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時 $\cos\alpha > 0$，

$$a > 0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

所以若 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$，由靜止開始的系統會朝正方向加速：M 沿其斜面下滑，正如題目所求。

? **想一想** 我們怎樣知道繩子一直保持拉緊，從而確定這些方程是正確的？

由第二條方程，$T = m(a + g\cos\alpha)$，當 $a > 0$ 時這是正數，所以繩子拉緊與方程並無矛盾。此外，繩子也不可能鬆弛：假如鬆弛了，每個質點都會沿自己的斜面向下滑，兩者同時遠離滑輪，這就需要一條更長的繩子。

第 (ii) 部分

現在 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$，所以 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$，而且 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$，故由第 (i) 部分可知，運動方向仍然是 M 向下。代入 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$ 並約去 M：

$$\begin{aligned} a &= \frac{g\,(M\sin\alpha - \frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha)}{M + \frac{1}{2}M\tan\alpha} = \frac{g\,(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha)}{1 + \frac{1}{2}\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)} \\ &= \frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \end{aligned}$$

其中用到 $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$。這就是所求的加速度大小。

求極大值。比值 m/M 透過 $\tan\alpha = 2m/M$ 決定了 α，所以我們要求以下函數的極大值：

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \qquad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

利用商法則（quotient rule），並由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$，得

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\,(\tan\alpha+2) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha+2)^2}.$$

把分子乘以 $\cos^2\alpha > 0$，並利用 $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$：

$$\cos^2\alpha\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

所以 $f'(\alpha)$ 的正負號與 $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\,(2-\tan^3\alpha)$ 相同。當 $\tan\alpha$ 由 0 增至 ∞ 時，這個式子在 $\tan^3\alpha < 2$ 時為正，一旦 $\tan^3\alpha > 2$ 便為負。因此 f 先遞增後遞減，其極大值出現於唯一的駐點（stationary point）

$$\tan^3\alpha = 2.$$

（你也可以這樣看出這是極大值：在整個區間上 $f > 0$，而在兩端 $f \to 0$。）配合 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$，這即是說

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{即} \qquad 4m^3 = M^3,$$

正如題目所求。

驗算

- 第 (i) 部分的極限情況：當 $m = 0$ 時得 $a = g\sin\alpha$，即光滑斜面上只有一個質點的情形；而當 $\tan\alpha = m/M$ 時得 $a = 0$，即平衡點。
- 在最優情況下，$\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$，所以 $\alpha \approx 51.6°$，而 $m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$。對 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上作網格搜尋，所得的極大值位於同一個 α，其值為 $f \approx 0.240$，所以最大加速度約為 $0.240g$。
- 以隨機的質量和角度代入第 (i) 部分的一般公式，每當 $\tan\alpha = 2m/M$ 時，結果都與第 (ii) 部分的公式吻合，而且兩條運動方程給出相同的正張力。

常見錯誤

- 對 m 使用 $mg\sin\alpha$：它所在斜面的傾角是 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，所以分量應是 $mg\cos\alpha$。
- 固定 m 而讓 M 變化（或反過來）去求極大值，卻沒有留意 a 只取決於 α。把一切都用 α 表示，問題便成為單變量問題。

STEP 之外

像這樣由約束（constraint）把物體連繫起來的系統，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點：你只需選取一個坐標（這裏是沿繩子移動的距離 s），張力和法向反作用力等約束力便會自動消失。大學一年級的課程會把這個想法發展成一套有系統的

方法，適用於滑輪、擺以及許多其他情況。若想找一本在這個程度上清楚講解牛頓力學的書，可以看 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。