詳細解答

STEP I 2009，第 1 題

純數學 • 因數的計數

> **STEP I 2009，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

關鍵思路

$p^a q^b$（其中 p、q 為相異質數）的每一個因數（factor）都可寫成 $p^i q^j$，其中 $0 \le i \le a$ 及 $0 \le j \le b$；而根據唯一分解定理（unique factorisation），不同的 (i, j) 會給出不同的因數。因此因數的數目是一個乘積 $(a+1)(b+1)$，而且無論有多少個質數，同樣的結論都成立。計算真因數（proper factor）的數目只需再減去 2，於是兩部分都變成把一個數寫成乘積的問題。

解答

以 $d(N)$ 表示 N 的正因數的數目，包括 1 和 N 在內。若

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

其中 p_i 為相異質數且 $a_i \ge 1$，則 N 的正因數是 $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$，其中 $0 \le e_i \le a_i$；每個 e_i 有 $a_i + 1$ 種選擇，而根據唯一分解定理，不同的選擇給出不同的因數。因此

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

當 $N > 1$ 時，因數 1 和 N 並不相同，所以真因數的數目是 $d(N) - 2$。

第 (i) 部分

對於 $3^2 \times 5^3$，我們得到 $d = (2+1)(3+1) = 12$，所以共有 $12 - 2 = 10$ 個真因數，符合題目所求。

現在考慮 $3^m \times 5^n$。要令這個數是整數，而且至少有一個真因數，我們需要 $m, n \ge 0$（3 或 5 的負數次冪無法被另一個質數抵銷）。它的因數是 $3^i 5^j$，其中 $0 \le i \le m$、$0 \le j \le n$，

所以 $d = (m+1)(n+1)$（這亦涵蓋 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的情況）。我們需要

$$(m+1)(n+1) = 12,$$

也就是把 12 分解成兩個正整數的有序乘積。這些分解是

$$1 \times 12, \quad 2 \times 6, \quad 3 \times 4, \quad 4 \times 3, \quad 6 \times 2, \quad 12 \times 1,$$

從而得出

$$(m,n) = (0,11),\ (1,5),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,1),\ (11,0).$$

同樣根據唯一分解定理，每一組都給出不同的整數。其中一組 $(2,3)$ 就是題目給出的數，所以這種形式而又有 10 個真因數的**其他**整數恰好有 **5** 個：5^{11}、3×5^5、$3^3 \times 5^2$、$3^5 \times 5$ 和 3^{11}。

第 (ii) 部分

我們需要 $d(N) = 426 + 2 = 428$，而

$$428 = 2^2 \times 107,$$

其中 107 是質數（它不能被 2、3、5 或 7 整除，而且 $11^2 > 107$）。

想一想 N 的質因數分解（prime factorisation）可能有哪些形式？

各個 $a_i + 1$ 都至少是 2，而它們的乘積是 428。由於 107 是質數，當中恰好有一個是 107 的倍數，而它只能是 107、214 或 428；其餘各數的乘積則分別是 4、2 或 1。不計次序的話，$a_i + 1$ 這組數的可能情況是

$$\{428\}, \qquad \{214, 2\}, \qquad \{107, 4\}, \qquad \{107, 2, 2\},$$

所以指數組成的多重集（multiset）是

$$\{427\}, \qquad \{213, 1\}, \qquad \{106, 3\}, \qquad \{106, 1, 1\}.$$

想一想 指數確定之後，應該把它們分配給哪些質數？

指數既定，要令 N 盡可能小，就應該使用最小的質數，並把最大的指數放在最小的質數上。使用最小的可用質數顯然最好：把一個質數換成一個較小而未用過的質數，N 就會變小。另外，若 $p < q$，但 p 的指數是 a、q 的指數是 b，而 $a < b$，則把兩個指數對調，相當於把 N 乘以

$$\frac{p^b q^a}{p^a q^b} = \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a} < 1,$$

所以對調之後 N 會變小。因此每種形式的最佳候選是

$$2^{427}, \qquad 2^{213}\times 3, \qquad 2^{106}\times 3^3, \qquad 2^{106}\times 3\times 5.$$

比較它們的大小：

- $2^{106}\times 3\times 5 = 2^{106}\times 15 < 2^{106}\times 27 = 2^{106}\times 3^3$；
- $2^{106}\times 27 < 2^{106}\times 2^5 = 2^{111}$，而這遠小於 $2^{213}\times 3$ 和 2^{427}。

因此

$$N = 2^{106}\times 3\times 5.$$

驗算一下：$d(N) = 107\times 2\times 2 = 428$，所以 N 有 426 個真因數。

驗算

- 取一個較小的例子，直接列出 $3\times 5^5 = 9375$ 的因數：3^i5^j，其中 $i\in\{0,1\}$、$j\in\{0,\ldots,5\}$，共有 12 個因數，所以有 10 個真因數。
- 用電腦對所有滿足 $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$ 的指數組合 $2^a3^b5^c7^d$ 作一次簡短的搜尋，可確認最小的是 $2^{106}\times 15 \approx 1.22\times 10^{33}$，其次是 $2^{106}\times 27$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分答 6：題目問的是其他整數，所以題目給出的那一個不計算在內。
- 遺漏 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的情況（即 5^{11} 和 3^{11}），它們同樣符合題目要求的形式。
- 以為第 (ii) 部分的答案必須用上盡可能多的質數：107 是質數，這就迫使其中一個指數非常大，真正可以選擇的只有因數 4 如何拆分。

STEP 之外

函數 $d(N)$ 是一個積性（multiplicative）函數：只要 m 和 n 互質（coprime），就有 $d(mn) = d(m)d(n)$，而這正是本題所用的乘積公式。因數數目比每一個較小的數都多的數，就是拉馬努金（Ramanujan）的高度合成數（highly composite numbers），而第 (ii) 部分對調指數的論證，正是他刻劃這類數的第一步。想閱讀有關唯一分解定理和算術函數（arithmetic functions）的內容，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本初等數論經典入門書）是個好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。