詳細解答

STEP III 2008，第 9 題

力學 • 摩擦力與變力

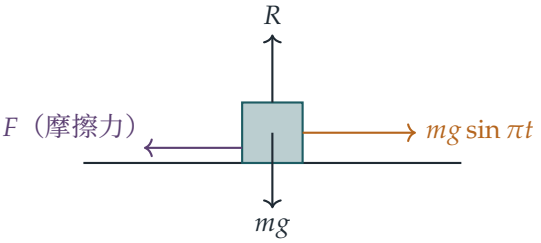
> **STEP III 2008，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q9

關鍵思路

摩擦力有兩種狀態。質點（particle）靜止時，靜摩擦力（static friction）恰好與外加的力相等，上限為 μmg，因此加速度為零。質點一旦滑動，摩擦力的大小固定為 μmg，方向與速度相反。所以加速度的圖像由若干段平坦的零值線段和平移後的正弦曲線連接而成。「靜止下來」的意思是：速度（即自運動開始起加速度圖像下的面積）回到零。

解答

我們把物體看成粗糙水平面上的質點。法向反作用力（normal reaction）為 $R = mg$，所以靜止時摩擦力的大小至多為 μmg，滑動時則恰好為 μmg。取 $\sin \pi t > 0$ 時外力的方向為正方向，並設 a 和 v 分別為加速度和速度。



開始運動

沿鉛垂方向分解，得 $R = mg$。質點靜止時，水平方向的平衡需要大小為 $mg|\sin \pi t|$ 的摩擦力，而只要 $mg|\sin \pi t| \leq \mu mg$，這是可以做到的。當外力首次超過極限摩擦力

（limiting friction）時，質點便首次開始運動，所以（當 $\mu < 1$ 時）

$$\sin \pi T_0 = \mu, \qquad \text{即} \qquad T_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \mu, \quad 0 \le T_0 < \tfrac{1}{2}.$$

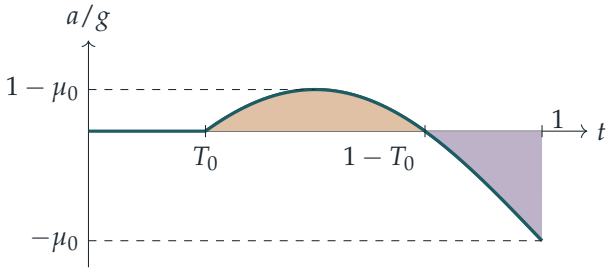
（若 $\mu \ge 1$，質點永遠不會運動。）

第 (i) 部分

當 $0 \le t \le T_0$ 時質點靜止，所以 $a = 0$。當 $t > T_0$ 時，質點沿正方向滑動，摩擦力 $\mu_0 mg$ 指向後方，由牛頓（Newton）第二定律得

$$a = g(\sin \pi t - \mu_0) \qquad (\text{只要} v > 0).$$

這個加速度在 $t = T_0$ 時由 0 開始，在 $t = \frac{1}{2}$ 時升至 $g(1 - \mu_0)$，在 $t = 1 - T_0$ 時回落至 0（由對稱性 $\sin \pi(1 - t) = \sin \pi t$ 可知），此後一直為負，在 $t = 1$ 時達到 $-\mu_0 g$。



速度就是這個圖像由 T_0 起計的面積：曲線在橫軸之上時（琥珀色區域）速度增加，過了 $1 - T_0$ 之後（紫紅色區域）速度減少。在兩塊面積互相抵銷之前，速度一直為正，而抵銷的一刻就是質點停下來的時刻。所以我們需要

$$v(1) = \int_{T_0}^{1} g(\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

現在

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{1} (\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t &= \Big[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \Big]_{T_0}^{1} - \mu_0 (1 - T_0) \\ &= \frac{1 + \cos \pi T_0}{\pi} - \mu_0 + \mu_0 T_0. \end{aligned}$$

令上式等於零，再乘以 π：

$$1 + \cos \pi T_0 - \mu_0 \pi + \mu_0 \pi T_0 = 0.$$

想一想 用 μ_0 表示 $\cos \pi T_0$ 時，它應取哪個符號？

由於 $0 \le \pi T_0 < \frac{\pi}{2}$，餘弦為正，所以 $\cos \pi T_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \pi T_0} = (1 - \mu_0^2)^{1/2}$。另外 $\pi T_0 = \arcsin \mu_0$。把兩者代入，得

$$1 + \left(1 - \mu_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - \mu_0 \pi + \mu_0 \arcsin \mu_0 = 0,$$

這正是所要證明的。（數值上 $\mu_0 \approx 0.7246$，$T_0 \approx 0.258$。）

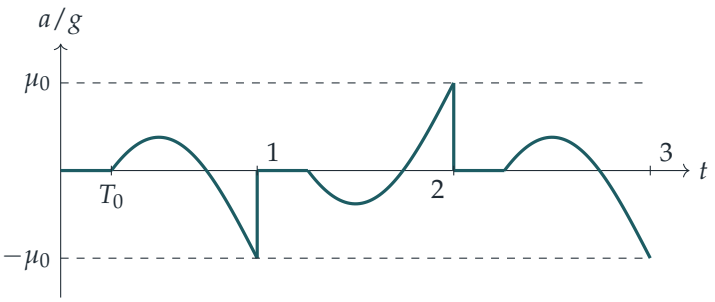
第 (ii) 部分

在 $t = 1$ 時，質點靜止，外力為 $mg \sin \pi = 0$。當 $1 < t < 2$ 時，外力指向負方向，大小為 $mg|\sin \pi t|$。在 $|\sin \pi t| = \mu_0$ 之前，這個力小於 $\mu_0 mg$，而該等式首次成立是在 $t = 1 + T_0$（因為 $\sin \pi(1 + T_0) = -\sin \pi T_0$）。所以當 $1 \le t \le 1 + T_0$ 時，質點保持靜止，$a = 0$。

此後質點沿負方向滑動，摩擦力指向正方向，於是

$$a = g(\sin \pi t + \mu_0).$$

由於 $\sin \pi(t + 1) = -\sin \pi t$，這恰好是第 (i) 部分中時刻 $t - 1$ 的加速度的相反數。因此 $[1, 2]$ 上的運動是 $[0, 1]$ 上運動的鏡像：速度是先前速度的相反數，所以質點在 $t = 2$ 時再次靜止，並且往回走了相同的距離。這時質點靜止而外力為零，與 $t = 0$ 時的情況完全相同，所以在 $[2, 3]$ 上，$[0, 1]$ 的運動會重演一次。



在 $t = 1$ 和 $t = 2$ 處的鉛垂線段表示加速度的跳躍：在質點停下的一瞬間，動摩擦力（kinetic friction，大小為 $\mu_0 mg$）被靜摩擦力取代，而靜摩擦力只需平衡大小為零的外力。

$\mu = \mu_0$ 時的運動。質點一直靜止至 $t = T_0$，然後向前滑動，在 $t = 1$ 時停下，等到 $t = 1 + T_0$，再向後滑動，在 $t = 2$ 時停在出發點，如此類推。它在同一段地面上來回往返，週期為 2，在兩端各停留 T_0 的時間。（再積分一次，可得這段路的長度為 $g[\mu_0/\pi^2 - (1 - T_0)(1 - \sqrt{1 - \mu_0^2})/(2\pi)] \approx 0.0367g$，不過題目並沒有要求這個結果。）

$\mu = 0$ 時的運動。這時 $T_0 = 0$，而且在任何時刻都有 $a = g \sin \pi t$，所以

$$v = \frac{g}{\pi}(1 - \cos \pi t) \ge 0, \qquad x = \frac{g}{\pi}\left(t - \frac{\sin \pi t}{\pi}\right).$$

速度永不為負，並且只在 $t = 0, 2, 4, \ldots$ 時為零。所以質點永不回頭：它一陣一陣地向前衝，在偶數時刻瞬間靜止，每個長度為 2 的週期前進 $2g/\pi$，平均速率為 g/π。在粗糙的情況下，令質點在 $t = 1$ 停下來的正是摩擦力；沒有摩擦力時，外力向後的那一半只會把質點減速至速度為零。

驗算

用二分法（bisection）解第 (i) 部分的方程，得 $\mu_0 \approx 0.72461$，因而 $T_0 \approx 0.25798$。取 $g = 9.8$，對 $0 \le t \le 3$ 的運動作數值模擬，並在靜摩擦力與動摩擦力之間切換，結果顯示質點在 $t \approx 0.258$ 時起動，走了 0.3598 之後在 $t = 1.000$ 時停下，在 $t \approx 1.258$ 時開始往回走，並在 $t = 2.000$ 時停在出發點，與 $0.0367g$ 吻合。當 $\mu = 0$ 時，模擬結果與 $x = g(t - \sin \pi t/\pi)/\pi$ 一致。對方程作一個簡單的合理性檢查：在 $\mu_0 = 0$ 時左邊為 $2 > 0$，在 $\mu_0 = 1$ 時左邊為 $1 - \pi/2 < 0$，所以在 $(0, 1)$ 內有根。

常見錯誤

- 由 $t = 0$ 起就取 $a = g(\sin \pi t - \mu)$：在 T_0 之前質點靜止，摩擦力是靜摩擦力，所以 $a = 0$。
- 在第 (ii) 部分中，質點反向之後仍讓摩擦力保持原來的方向。摩擦力總是與速度方向相反。
- 以為質點在 $t = 1 - T_0$ 時停下，但那時為零的是加速度，而不是速度。

STEP 之外

摩擦力在「黏住」與「滑動」之間切換，令運動方程變成分段（piecewise）的形式，加速度亦變得不連續。這就是門鉸吱吱作響和小提琴弓拉琴弦背後的黏滑（stick–slip）現象，也是非光滑動力系統（non-smooth dynamical system）的一個入門例子。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）以合適的程度討論了摩擦力模型和受迫運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。