詳細解答

STEP III 2008，第 8 題

純數學 • 級數與遞推關係

> **STEP III 2008，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q8

關鍵思路

係數滿足線性遞推關係（linear recurrence），意味着只要把級數乘以適當的多項式，幾乎所有項都會互相抵消。這個多項式可以直接從遞推關係讀出來：$a_{r+1} + pa_r = 0$ 提示我們用 $1 + px$，而 $a_{r+2} + pa_{r+1} + qa_r = 0$ 則提示我們用 $1 + px + qx^2$。餘下的只是一個很短的多項式，所以級數之和是一個有理函數（rational function）。對於有限項之和，同樣的技巧會在末端留下幾個額外的項。另一個做法是用部分分式（partial fractions）把級數拆成幾個等比級數（geometric series），而等比級數的和我們是懂得求的。

解答

第 (i) 部分

這裏級數由 x 項開始，所以 $a_1 = \frac{1}{3}$，$a_2 = \frac{1}{6}$，$a_3 = \frac{1}{12}$。每個係數都是前一個的一半，所以 $a_{r+1} - \frac{1}{2}a_r = 0$，即

$$p = -\tfrac{1}{2}.$$

（這裏沒有常數項。遞推關係只把 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 聯繫起來，對 $r = 0$ 的情況並無任何說明。）解這個遞推關係，得 $a_r = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$。

無窮項之和（sum to infinity）。 乘以 $1 - \frac{1}{2}x$：

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}x\right) S = a_1 x + \sum_{r \geq 1} \left(a_{r+1} - \tfrac{1}{2}a_r\right) x^{r+1} = \tfrac{1}{3}x,$$

因為根據遞推關係，每個括號都等於零。因此

$$S = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{3(2-x)}.$$

這是一個公比為 $\frac{1}{2}x$ 的等比級數，所以無窮項之和恰好在 $|x| < 2$ 時存在。

首 $n+1$ 項。 這些就是 $x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ 各項。設 $S_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} a_r x^r$。重複同樣的乘法，中間各項仍然全部抵消，但最高次的一項 $-\frac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2}$ 卻沒有對應的項與它抵消：

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right) S_{n+1} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

所以，當 $x \neq 2$ 時，

$$S_{n+1} = \frac{2x}{3(2-x)}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

當 $x = 2$ 時，每一項都等於 $\frac{2}{3}$，所以 $S_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$。

第 (ii) 部分

現在 $a_0 = 2$，$a_1 = 8$，$a_2 = 18$，$a_3 = 37$。把 $r = 0$ 和 $r = 1$ 代入遞推關係，得到兩條方程：

$$18 + 8p + 2q = 0, \qquad 37 + 18p + 8q = 0.$$

由第一條方程得 $q = -9 - 4p$。代入第二條方程，得 $37 + 18p - 72 - 32p = 0$，所以 $p = -\frac{5}{2}$，從而 $q = 1$。遞推關係是

$$a_{r+2} - \tfrac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0.$$

無窮項之和。 乘以 $1 + px + qx^2 = 1 - \frac{5}{2}x + x^2$。對每個 $r \geq 0$，乘積中 x^{r+2} 的係數是 $a_{r+2} - \frac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0$。只有 x^0 和 x^1 的係數留下來：

$$\left(1 - \tfrac{5}{2}x + x^2\right) T = a_0 + \left(a_1 - \tfrac{5}{2}a_0\right) x = 2 + 3x.$$

把分子和分母同時加倍，並把 $2 - 5x + 2x^2 = (1-2x)(2-x)$ 因式分解，得

$$T = \frac{4+6x}{(1-2x)(2-x)}.$$

部分分式。 設 $\dfrac{4+6x}{(1-2x)(2-x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{2-x}$。用遮蓋法（cover-up），在 $x = \frac{1}{2}$ 處得 $A = \dfrac{7}{3/2} = \frac{14}{3}$，在 $x = 2$ 處得 $B = \dfrac{16}{-3} = -\frac{16}{3}$。所以

$$T = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

把每一項展開成等比級數，得

$$a_r = \tfrac{14}{3}\,2^r - \tfrac{8}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^r.$$

驗算：$r = 0, 1, 2, 3$ 分別給出 2、$\frac{28}{3} - \frac{4}{3} = 8$、$\frac{56}{3} - \frac{2}{3} = 18$ 和 $\frac{112}{3} - \frac{1}{3} = 37$，與已知的值相符。

> **想一想**　無窮項之和究竟對哪些 x 才存在？

兩個等比級數都必須收斂（converge），所以需要 $|2x| < 1$ 和 $|\frac{1}{2}x| < 1$。第一個條件較為嚴格，所以我們需要 $|x| < \frac{1}{2}$。

首 $n+1$ 項。　這些就是由 x^0 到 x^n 的各項。把每個等比級數求和至 $n+1$ 項，當 $x \neq \frac{1}{2}, 2$ 時，得

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \frac{14}{3} \cdot \frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{2-x}.$$

（第二個分式就是 $\frac{8}{3} \cdot \frac{1-(x/2)^{n+1}}{1-x/2}$，只是分子和分母都乘以 2。）若 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 2$，對應的等比級數之和就只是 $n+1$ 個 1 相加。

驗算

- 在 $|x| < \frac{1}{2}$ 的情況下令 $n \to \infty$：冪 $(2x)^{n+1}$ 和 $(x/2)^{n+1}$ 趨向零，於是我們重新得到 T 的部分分式形式。在第 (i) 部分，當 $|x| < 2$ 時情況相同。
- 取 $n = 0$，第 (i) 部分的公式給出 $\frac{2x}{3(2-x)} \cdot \frac{2-x}{2} = \frac{1}{3}x$。第 (ii) 部分的公式給出 $\frac{14}{3} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2$。兩者都是首項，正如所料。
- 數值上，在 $x = 0.3$ 處有 $T = \dfrac{5.8}{0.4 \times 1.7} \approx 8.5294$，而 $2 + 8x + 18x^2 + 37x^3 + \cdots$ 的部分和（partial sums）亦趨近這個值。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，把首項當作 $a_0 x^0$。級數由 x^1 開始，所以首 $n+1$ 項一直去到 x^{n+1}。
- 把有限項之和乘以 $1 + px$ 時，忘記了末端剩下的項。正是這些項產生了 $(\frac{x}{2})^{n+1}$ 這個因子。
- 對 T 寫出 $|x| < 2$。決定收斂半徑（radius of convergence）的，是較接近原點的根 $x = \frac{1}{2}$。

STEP 之外

冪級數（power series）$\sum a_r x^r$ 是數列 (a_r) 的生成函數（generating function）。常係數線性遞推關係必定給出有理的生成函數，而這個函數的極點（poles）既決定 a_r 的閉合形式（closed form），也決定收斂半徑。生成函數是組合數學（combinatorics）和概率論中的標準工具，而冪級數的收斂半徑則會在大學一年級的分析課程中嚴謹地建立起來。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）對收斂這方面有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。