詳細解答

STEP III 2008，第 7 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP III 2008，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q7

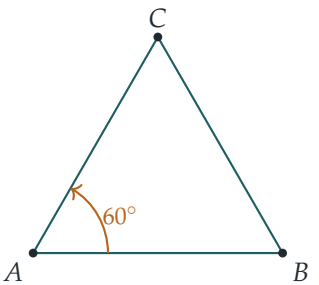
關鍵思路

在阿根圖（Argand diagram）上，乘以 $e^{i\pi/3}$ 相當於逆時針旋轉 60°。等邊三角形（equilateral triangle）正好就是把一條邊繞着一個頂點旋轉 60° 而成，所以開首的關係式把「等邊」這個條件化成了 a、b、c 的線性方程。之後兩部分都只是按部就班的整理功夫：把每個新的點用原有的點表示出來，再驗證我們想要的條件——若要證明是平行四邊形（parallelogram），就驗證 $p + r = q + s$；若要證明是等邊三角形，就驗證開首的關係式本身。

解答

開首的關係式

設 $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。由於 ABC 是等邊三角形，AC 與 AB 等長，並與它成 60° 角。因為三角形的頂點是按逆時針方向排列的，所以由 $\overrightarrow{AB}$ 轉到 $\overrightarrow{AC}$ 是逆時針方向。因此 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 旋轉 $+60°$ 所得：



$$c-a=\omega(b-a)=\tfrac{1}{2}(b-a)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(b-a),$$
$$2c=2a+(b-a)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a)=(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a),$$

這就是所要求的結果。

若三角形的頂點按順時針方向排列，$\overrightarrow{AC}$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 旋轉 -60° 所得，所以 $c-a=\bar{\omega}(b-a)$，其中 $\bar{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。同樣的代數運算給出

$$2c=(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a).$$

反過來說，任何滿足其中一條關係式的 c 都會令 ABC 成為等邊三角形，因為每條關係式都等價於 $c-a=\omega^{\pm1}(b-a)$。所以要證明一個三角形是等邊三角形，只需驗證其中一條關係式便可。

第 (i) 部分

四個頂點由我們自行選擇，而每一個都可以放在所屬邊的任何一側。利用開首的結果，並讓這些頂點擔當 c 的角色，取

$$\begin{aligned}
2p&=(d+e)+\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d) && (D,E,P\text{ 逆時針}),\\
2q&=(e+f)-\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e) && (E,F,Q\text{ 順時針}),\\
2r&=(f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}(g-f) && (F,G,R\text{ 逆時針}),\\
2s&=(g+d)-\mathrm{i}\sqrt{3}(d-g) && (G,D,S\text{ 順時針}).
\end{aligned}$$

根據開首的結果，PDE、QEF、RFG、SGD 於是全都是等邊三角形。

> **想一想** 為甚麼要讓方向交替變換，而不是把每個三角形都放在所屬邊的同一側？

不妨試試看。$PQRS$ 是平行四邊形，當且僅當 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$，即 $q-p=r-s$，亦即 $p+r=q+s$。（這表示對角線 PR 與 QS 有相同的中點。）按上面的選擇，

$$2(p+r)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f),$$
$$2(q+s)=(d+e+f+g)-\mathrm{i}\sqrt{3}\,(f-e+d-g)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f).$$

兩者相等，所以 $p+r=q+s$，$PQRS$ 是平行四邊形。假如我們全部都用「+」號，虛部就會是 $\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d+g-f)$ 和 $\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e+d-g)$。這兩者只在 $d+f=e+g$ 時才相等，也就是只在 $DEFG$ 本身已經是平行四邊形時才相等。正是正負號交替，才令含 $\sqrt{3}$ 的項對任何四邊形都能吻合。

（對某些四邊形來說，這四點可能剛好共線，得出一個退化的平行四邊形。在這種情況下，條件 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ 仍然成立。）

第 (ii) 部分

若 LMN 的頂點按順時針方向排列，可把整個圖形對實軸作反射（即取共軛複數（complex conjugate））。反射保持等邊三角形和形心（centroid）不變，也保持邊上的三角形是否向外作這一性質，所以只需處理 LMN 按逆時針方向排列的情況。

這時 N 位於有向邊 $L \to M$ 的左方，而 LM 上向外作的三角形 LMX 的頂點 X 則在右方，所以 L, M, X 是按順時針方向排列的：

$$2x = (l+m) - \mathrm{i}\sqrt{3}(m-l).$$

LMX 的形心是

$$u = \tfrac{1}{3}(l+m+x) = \tfrac{1}{3}(l+m) + \tfrac{1}{6}(l+m) - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(m-l) = \frac{l+m}{2} + \frac{\mathrm{i}(l-m)}{2\sqrt{3}},$$

其中用到 $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$。作輪換 $l \to m \to n \to l$（這樣會保持逆時針的次序），得

$$v = \frac{m+n}{2} + \frac{\mathrm{i}(m-n)}{2\sqrt{3}}, \qquad w = \frac{n+l}{2} + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{2\sqrt{3}}.$$

我們現在證明 U, V, W 滿足逆時針的關係式 $2w = (u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)$。首先，

$$u+v = \tfrac{1}{2}l + m + \tfrac{1}{2}n + \frac{\mathrm{i}(l-n)}{2\sqrt{3}},$$
$$v-u = \tfrac{1}{2}(n-l) + \frac{\mathrm{i}(2m-l-n)}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(n-l) - \tfrac{1}{2}(2m-l-n).$$

想一想 m 是怎樣消失的？

把第一行和第三行相加。實部給出 $\frac{1}{2}l + m + \frac{1}{2}n - m + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n = l + n$，所以 m 在實部中互相抵消，而它從來沒有在虛部中出現過。虛部合併成

$$(n-l)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)\mathrm{i} = (n-l)\,\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}.$$

因此

$$(u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = (n+l) + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}} = 2w.$$

根據開首的結果（及其逆命題），UVW 是一個頂點按逆時針方向排列的等邊三角形。這就是拿破崙定理（Napoleon's theorem）。

驗算

- 開首的關係式：$a = 0$，$b = 2$ 給出 $c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$，頂點在實軸上方，與逆時針排列的三角形應有的情況相符。
- 第 (ii) 部分，取 $l = 0$，$m = 6$，$n = 6\mathrm{i}$：由公式得 $u = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$，$v = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i})$ 和 $w = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$。於是 UVW 三條邊的長度平方都是 $24 + 12\sqrt{3}$。
- 我們用 10^4 個隨機構形，以數值方法檢驗了開首的關係式、平行四邊形條件和拿破崙定理。我們亦確認了，在第 (i) 部分若每條邊都用同一方向，一般而言並不成立。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分弄錯向外的方向。對於按逆時針方向排列的 LMN，LM 上向外的頂點相對於 L, M 是順時針方向的。用錯了正負號，得到的就會是內拿破崙三角形。（它同樣是等邊三角形，但並不是題目所問的。）
- 在第 (i) 部分，試圖令四個三角形全部指向同一方。這只在 $DEFG$ 本身是平行四邊形時才行得通。
- 用 $p + q = r + s$ 來檢驗平行四邊形。應該是相對的頂點配成一對：條件是 $p + r = q + s$。

STEP 之外

背後的想法是：映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$ 正好就是平面上的旋轉、放大和平移，所以幾何條件會變成 $\mathbb{C}$ 上的線性方程。開首的關係式有一個簡潔的改寫方式：ABC 是等邊三角形，當且僅當 $a + \omega^2 b + \omega^4 c = 0$ 或 $a + \omega^4 b + \omega^2 c = 0$，而拿破崙定理只需幾行代數運算便隨之而得。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把複數乘法的這種幾何觀點發揮得淋漓盡致。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。