詳細解答

STEP III 2008，第 6 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP III 2008，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q6

關鍵思路

每條方程都直接以 x 和斜率 p 表示 y，但並未解出 p，所以不能直接積分。對 x 求導可以消去 y（因為 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p$），餘下一條關於 x、p 和 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 的關係式。把這條關係式上下倒轉，便得到一條以 x 為 p 的函數的線性一階微分方程（linear first-order differential equation），可用積分因子（integrating factor）求解。然後把 $x(p)$ 代回原方程，便可求得 y。

解答

第 (i) 部分

把 $y = p^2 + 2xp$ 對 x 求導，對 p^2 用鏈式法則（chain rule），對 $2xp$ 用積法則（product rule），並以 p 取代 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$：

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad -p = (2p + 2x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

> ? **想一想** 我們可以把 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 倒轉而得出 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$ 嗎？

我們需要 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$。上面的方程顯示，凡是 $p \neq 0$ 之處，$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 和 $2p + 2x$ 都不等於零。（反正我們要除以 p，所以整個過程都需要 $p \neq 0$。）因此可以寫成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2p + 2x}{p} = -2 - \frac{2x}{p},$$

正是題目所求。

整理後，這是一條對 x 為線性的方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -2.$$

積分因子是 $\mathrm{e}^{\int 2/p\,\mathrm{d}p} = p^2$，全式乘以它，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -2p^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2x = -\tfrac{2}{3}p^3 + A \quad\Longrightarrow\quad x = -\tfrac{2}{3}p + Ap^{-2},$$

其中 A 為任意常數。這就是題目給出的結果。

現在利用當 $x = 2$ 時 $p = -3$：

$$2 = -\tfrac{2}{3}(-3) + \frac{A}{9} = 2 + \frac{A}{9},$$

所以 $A = 0$，而 $x = -\frac{2}{3}p$，即 $p = -\frac{3}{2}x$。代入原方程，

$$y = p^2 + 2xp = \tfrac{9}{4}x^2 + 2x\left(-\tfrac{3}{2}x\right) = \tfrac{9}{4}x^2 - 3x^2,$$

所以

$$y = -\tfrac{3}{4}x^2.$$

驗算一下：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x$，確實就是 p，而且在 $x = 2$ 時等於 -3。

第 (ii) 部分

這裏出現了 $\ln p$，所以 $p > 0$。把 $y = 2xp + p\ln p$ 對 x 求導，並利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\ln p) = \ln p + 1$：

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (\ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad -p = (2x + \ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

與之前一樣，$p \neq 0$ 令 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2x + \ln p + 1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -\frac{\ln p + 1}{p}.$$

積分因子同樣是 p^2：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -p\ln p - p.$$

用分部積分法（integration by parts），取 $u = \ln p$，$\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}p$，

$$\int p\ln p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \int \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2,$$

所以

$$\begin{aligned} p^2x &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + B \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2 + B, \end{aligned}$$

而

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4} + Bp^{-2}.$$

利用當 $x = -\frac{1}{4}$ 時 $p = 1$：$-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + B$，所以 $B = 0$，而

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4},$$

這正是題目要求我們證明的結果。

要求出 y，留意上式即 $\ln p = -2x - \frac{1}{2}$。把它代入原方程，比起把每一個 p 都代換掉要快：

$$y = 2xp + p\left(-2x - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}p,$$

而 $p = \mathrm{e}^{-2x-1/2}$，所以

$$y = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}}.$$

驗算：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}} = p$，理應如此；而在 $x = -\frac{1}{4}$ 時，其值為 $\mathrm{e}^0 = 1$。

驗算

在每一部分，把最後求得的 y 求導，確認導數確實就是你所用的 p：$y = -\frac{3}{4}x^2$ 給出 $p = -\frac{3}{2}x$，而 $p^2 + 2xp = \frac{9}{4}x^2 - 3x^2 = y$。至於第 (ii) 部分，在 $x = 0$ 時，$p = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$，而 $2xp + p\ln p = 0.6065 \times (-0.5) \approx -0.3033 = y(0)$。數值驗算亦確認了，對隨機選取的 A 和 B 值，一般的參數曲線 $(x(p), y(p))$ 的斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 都等於 p。

常見錯誤

- 忘記左邊的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 就是 p，因而看不出相消之後餘下 $-p$。
- 未用初始條件（initial condition）便把積分常數丟掉。這裏的常數碰巧等於零，但你要把它求出來之後才知道。
- 在第 (ii) 部分，把 $p\ln p$ 對 x 求導時只寫成 $\ln p$，遺漏了因子 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 和額外的 $+1$。

STEP 之外

形如 $y = xf(p) + g(p)$ 的方程稱為達朗貝爾（d'Alembert）方程，又稱拉格朗日（Lagrange）方程；其特殊情況 $y = xp + g(p)$ 就是克萊羅（Clairaut）方程。把 p 當作自變量（independent variable）的技巧對這些方程全部適用。它們還可能有奇異解（singular solutions），出現在我們曾除以 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 的地方，是通解（general solution）族的包絡線（envelope）。Boyce 與 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）涵蓋一階方程及其解法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。