詳細解答

STEP III 2008，第 5 題

純數學 • 遞推關係

> **STEP III 2008，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q5

關鍵思路

$\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ 這個量是遞推關係（recurrence）的一個不變量（invariant）：當 n 增加一時，前後兩項之差會互相抵銷，因為遞推關係容許我們把 $\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1}$ 換成 $2x\mathrm{T}_n$。當不變量為零時，相鄰兩項之比全部相等，所以數列是等比數列（geometric sequence）。再把等比數列代入遞推關係，便可確定公比（common ratio）是某個二次方程（quadratic）的根。

解答

以下 x 始終固定，並把 $\mathrm{T}_n(x)$ 記作 T_n，把 $\mathrm{f}(x)$ 記作 f。遞推關係 $(*)$ 即是

$$\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} = 2x\,\mathrm{T}_n \qquad (n \geq 1).$$

不變量

對 $n \geq 1$，設 $D_n = \mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$。我們用數學歸納法（induction）證明對所有 $n \geq 1$ 都有 $D_n = f$。

基本情況。$D_1 = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2$，按定義這就是 f。

歸納步驟。假設對某個 $k \geq 1$ 有 $D_k = f$。則

$$\begin{aligned} D_{k+1} - D_k &= \mathrm{T}_{k+1}^2 - \mathrm{T}_k\mathrm{T}_{k+2} - \mathrm{T}_k^2 + \mathrm{T}_{k-1}\mathrm{T}_{k+1} \\ &= \mathrm{T}_{k+1}(\mathrm{T}_{k+1} + \mathrm{T}_{k-1}) - \mathrm{T}_k(\mathrm{T}_{k+2} + \mathrm{T}_k) \\ &= \mathrm{T}_{k+1} \cdot 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_k \cdot 2x\mathrm{T}_{k+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中第三行對第一個括號用了 $(*)$ 取 $n=k$，對第二個括號則取 $n=k+1$（兩者皆可，因為 $k\geq 1$）。因此 $D_{k+1}=D_k=f$，由歸納法可知

$$\mathrm{T}_n^2-\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}=f\quad \text{對所有}n\geq 1,$$

這正是所要證明的。

$f\equiv 0$ 的情形

首先看看 $f=0$ 對 $r=\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0$ 有甚麼含意。由 $(*)$ 取 $n=1$，得 $\mathrm{T}_2=2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0$，所以

$$f=\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_0(2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0)=\mathrm{T}_0^2(r^2-2xr+1),$$

這裏用了 $\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$。於是，由於 $\mathrm{T}_0\neq 0$，

$$f=0\iff r^2=2xr-1. \tag{†}$$

> **想一想** 不變量告訴我們 $\mathrm{T}_n^2=\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$，所以各個比值相等。為甚麼不直接相除？

要除以 T_{n-1}，就必須先確定它不是零，這需要額外的論證。較簡潔的做法是從「比值相等」這個想法猜出答案，然後利用 (†)，直接以遞推關係本身來證明。

斷言。對所有 $n\geq 0$，$\mathrm{T}_n=\mathrm{T}_0\,r^n$。

證明。我們使用強歸納法（strong induction），每次用上相鄰的兩個情況。斷言在 $n=0$ 時顯然成立；在 $n=1$ 時亦成立，因為按 r 的定義有 $\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$。假設斷言對 $n=k-1$ 和 $n=k$ 成立，其中 $k\geq 1$。則由 $(*)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{k+1}&=2x\mathrm{T}_k-\mathrm{T}_{k-1}=2x\mathrm{T}_0r^k-\mathrm{T}_0r^{k-1}\\&=\mathrm{T}_0r^{k-1}(2xr-1)=\mathrm{T}_0r^{k-1}\cdot r^2=\mathrm{T}_0r^{k+1},\end{aligned}$$

其中第四步用了 (†)。所以斷言對 $n=k+1$ 成立，由歸納法可知它對所有 $n\geq 0$ 成立：

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x)=\mathrm{T}_0(x)\,(\mathrm{r}(x))^n}$$

$\mathrm{r}(x)$ 的可能形式

由 (†)，r 滿足 $r^2-2xr+1=0$，所以由二次公式（quadratic formula）得

$$\mathrm{r}(x)=x+\sqrt{x^2-1}\qquad 或\qquad \mathrm{r}(x)=x-\sqrt{x^2-1}.$$

反過來，無論取哪一個都滿足 (†)，所以 $f\equiv 0$，而數列 T_0r^n 確實符合 $(*)$。兩根之積為 1，所以它們互為倒數。當 $|x|<1$ 時兩根是複數，即 $x\pm\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$；設 $x=\cos\theta$，它們便成為 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$，而 $\mathrm{T}_n=\mathrm{T}_0\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\theta}$。

驗算

- 切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）$\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = x$、$\mathrm{T}_2 = 2x^2 - 1$ 給出 $f = x^2 - (2x^2 - 1) = 1 - x^2$，而事實上對每個 n 都有 $\cos^2 n\theta - \cos(n-1)\theta\cos(n+1)\theta = \sin^2\theta$。取 $x = \frac{3}{7}$，D_n 的首十四個值全部等於 $\frac{40}{49}$。
- 取 $r = 2$，則 $x = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$，並取 $\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = 2$。由遞推關係得 $\mathrm{T}_2 = \frac{5}{2}\cdot 2 - 1 = 4$ 及 $\mathrm{T}_3 = \frac{5}{2}\cdot 4 - 2 = 8$：正如所料，都是 2 的冪。此外，$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ 是另一個根。

常見錯誤

- 把 $(*)$ 用於 $n = 0$：遞推關係由 $n = 1$ 開始，所以基本情況必須是 D_1，而不是 D_0（後者根本沒有定義）。
- 把 $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ 除以 T_{n-1}，卻沒有檢查它是否非零。

STEP 之外

常係數線性遞推關係的解具有 $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ 的形式，其中 r_1, r_2 是其特徵方程（characteristic equation）的根，在這裏特徵方程是 $r^2 - 2xr + 1 = 0$。條件 $f = 0$ 所挑出的，恰好是只剩下一個等比項的情況；一般而言，f 是 $\alpha\beta$ 的倍數。不變量 D_n 可說是二階微分方程中朗斯基行列式（Wronskian）的離散版本，而對於 $y'' + q(x)y = 0$，朗斯基行列式是常數。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 詳細闡述了朗斯基行列式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的遞推關係題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。