詳細解答

STEP III 2008，第 4 題

純數學 • 反雙曲函數不等式

STEP III 2008，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/08-s3-q4

關鍵思路

設 $x = \cosh y$。半角公式（half-angle formula）把 $\tanh(y/2)$ 化為 x 的代數函數，於是一個關於 tanh 的顯淺不等式（inequality），就變成一個關於 arcosh 的不顯淺不等式。之後，題目其實是在運轉一部小機器：把不等式由 1 積分至 x，整理一下，便得到一個更強的不等式。把這部機器運轉兩次，先得出 (ii)，再得出 (iii)。

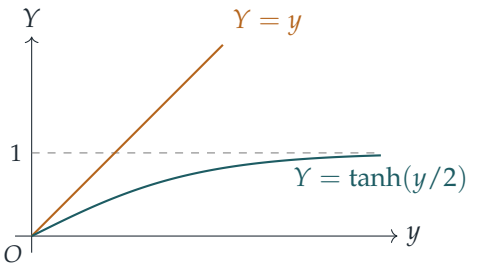
解答

以下一律記 $A(x) = \operatorname{arcosh} x$ 及 $S(x) = \sqrt{x^2-1}$，其中 $x \geq 1$。我們會用到以下兩個導數（derivative）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1).$$

第 (i) 部分

曲線 $Y = \tanh(y/2)$ 通過原點，在原點的斜率(gradient)為 $\frac{1}{2}$，在 $y > 0$ 時是凹(concave)的，而且永遠達不到 1；而直線 $Y = y$ 的斜率為 1：



對所有 $y > 0$，直線都在曲線之上。要嚴格說明這一點，設 $g(t) = t - \tanh t$。則 $g(0) = 0$，而且

$$g'(t) = 1 - \operatorname{sech}^2 t = \tanh^2 t > 0 \quad \text{對於} t > 0,$$

所以 g 嚴格遞增（strictly increasing），而當 $t > 0$ 時 $\tanh t < t$。取 $t = y/2$，得

$$\tanh(y/2) < \tfrac{1}{2}y < y \qquad (y > 0).$$

現在設 $x > 1$，並令 $y = \operatorname{arcosh} x$，於是 $y > 0$、$\cosh y = x$ 及 $\sinh y = +\sqrt{x^2 - 1}$（因為 $y > 0$，所以取正值）。利用 $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$ 及 $1 + \cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$，

$$\tanh \frac{y}{2} = \frac{\sinh y}{1 + \cosh y} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

因此 $y > \tanh(y/2)$ 變成

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

這就是 $(*)$。

第 (ii) 部分

固定 $x > 1$，以 t 為變數，把 $(*)$ 在 $[1, x]$ 上積分。

> ? **想一想** $(*)$ 的右邊，分母含有 $\sqrt{t^2 - 1}$。由 $t = 1$ 開始積分是否穩妥？積分之後，不等式是否仍然是嚴格的？

兩個問題的答案都是肯定的。當 $t > 1$ 時，$\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$，而當 $t \to 1$ 時它趨向 0，所以兩邊在 $[1, x]$ 上都是連續（continuous）的。兩者之差是連續的，並且在 $(1, x]$ 上嚴格為正，所以它在 $[1, x]$ 上的積分嚴格為正。

左邊用分部積分法（integration by parts），取 $u = \operatorname{arcosh} t$：

$$\int_1^x \operatorname{arcosh} t \, \mathrm{d}t = \Big[t \operatorname{arcosh} t \Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = x\,A(x) - S(x),$$

因為 $\operatorname{arcosh} 1 = 0$ 及 $\sqrt{1^2 - 1} = 0$。

右邊可拆成兩個標準積分：

$$\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} \, \mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \, \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \, \mathrm{d}t = S(x) - A(x).$$

因此

$$x\,A(x) - S(x) > S(x) - A(x) \quad \Longrightarrow \quad (x+1)A(x) > 2S(x).$$

兩邊除以 $x+1>0$，並如第 (i) 部分般化簡，

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 2\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

正是所求。這個下界剛好是 $(*)$ 中下界的兩倍。

第 (iii) 部分

第 (ii) 部分說明，當 $t>1$ 時 $\operatorname{arcosh} t > 2\cdot\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$：右邊與 $(*)$ 的右邊相同，只是乘大了一倍。所以我們把同一部機器再運轉一次。在 $[1,x]$ 上積分（理據與之前相同），並利用已求得的兩個積分，

$$x\,A(x) - S(x) > 2\big(S(x)-A(x)\big) \quad\Longrightarrow\quad (x+2)A(x) > 3S(x).$$

由於 $x+2>0$，

$$\operatorname{arcosh} x > 3\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \qquad (x>1),$$

這就是所求的結果。

> **想一想** 為甚麼到此為止？可以再積分一次嗎？

這部機器要求右邊是 $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$ 的倍數，因為我們知道它的積分。新的下界 $3\sqrt{t^2-1}/(t+2)$ 並非這個形式，所以這個技巧到此便用盡了。

作為獨立的驗證(即題目所謂「或用其他方法」的途徑)，設 $f(x) = A(x) - 3S(x)/(x+2)$。則 $f(1)=0$，而根據商法則（quotient rule），

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 3x(x+2) + 3(x^2-1)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad (x>1),$$

所以 f 嚴格遞增，而當 $x>1$ 時 $f(x)>0$，與之前的結果一致。

驗算

在 $x=2$：$\operatorname{arcosh} 2 = \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1.3170$，而三個下界分別是 $1/\sqrt{3}\approx 0.577$、$2/\sqrt{3}\approx 1.155$ 及 $3\sqrt{3}/4 \approx 1.299$。每個下界都比前一個好，而且全部低於 1.3170。在 $x=1$ 附近，這些下界變得非常精確：在 $x=1.001$，$\operatorname{arcosh} x \approx 0.04471763$，(ii) 的下界只差約 7×10^{-6}，而 (iii) 的下界更只差約 10^{-9}，因為每個下界與 $\operatorname{arcosh} x$ 吻合至 $x-1$ 的更高階。我們亦以數值方法檢驗了那兩個積分（在 $x=1.5, 2, 5$ 用中點求積法（midpoint quadrature)），並在 10 000 個隨機選取的 $x>1$ 檢驗了全部三個不等式，均沒有發現任何出入。

常見錯誤

- 取 $\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \pm\sqrt{x^2-1}$ 而沒有確定正負號。因為 $\operatorname{arcosh} x > 0$，所以應取正根。
- 由 0 而不是由 1 開始積分：arcosh 只在 $x \geq 1$ 時有定義，而正是下限 1 令邊界項（boundary terms）消失。
- 忘記說明為何積分後的不等式仍然是嚴格的。

STEP 之外

下界愈來愈好，是因為每積分一次，誤差在 $x = 1$ 處消失的階數便高一階；這是一系列愈來愈精確的有理型近似的開端，它們是帕德逼近（Padé approximants）的近親。全題貫徹使用的原理（若 $f(a) = 0$ 且 $f' > 0$，或其積分形式成立，則 $f > 0$）其實是中值定理（mean value theorem）的化身，也是大量分析學結果的基礎。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對中值定理和積分有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。